

Mecánica Clásica

(Definiciones Generales)

Alejandro A. Torassa

Licencia Creative Commons Atribución 3.0
(2011) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

Definiciones para una sola partícula A

$$m = m_A$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_A$$

Trabajo

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow W = \Delta \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

Impulso

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} dt \rightarrow \mathbf{I} = \Delta m \mathbf{v}$$

Conservación de Energía

$$\Delta E = \Delta \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E = cte.$$

Conservación de Momentum

$$\Delta \mathbf{M} = \Delta m \mathbf{v} - \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} dt \rightarrow \Delta \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{M} = cte.$$

Principio de Mínima Acción

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0$$

Definiciones para una sola bipartícula AB

$$m = m_A m_B$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B$$

Trabajo

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow W = \Delta \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

Impulso

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} dt \rightarrow \mathbf{I} = \Delta m \mathbf{v}$$

Conservación de Energía

$$\Delta E = \Delta \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E = cte.$$

Conservación de Momentum

$$\Delta \mathbf{M} = \Delta m \mathbf{v} - \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} dt \rightarrow \Delta \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{M} = cte.$$

Principio de Mínima Acción

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0$$

Definiciones para una sola partícula A (vector \mathbf{u})

$$m = m_A$$

$$\mathbf{u} = \dots \text{ ó } (\mathbf{r}_A) \text{ ó } (\mathbf{v}_A) \text{ ó } (\mathbf{a}_A) \text{ ó } \dots$$

$$\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = d^2\mathbf{u}/dt^2$$

Trabajo

$$W = \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} m\ddot{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} \rightarrow W = \Delta \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}^2$$

Impulso

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{u}} dt \rightarrow \mathbf{I} = \Delta m \dot{\mathbf{u}}$$

Conservación de Energía

$$\Delta E = \Delta \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}^2 - \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} m\ddot{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E = cte.$$

Conservación de Momentum

$$\Delta \mathbf{M} = \Delta m \dot{\mathbf{u}} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{u}} dt \rightarrow \Delta \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{M} = cte.$$

Principio de Mínima Acción

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dt = 0$$

Definiciones para una sola bipartícula AB (vector \mathbf{u})

$$m = m_A m_B$$

$$\mathbf{u} = \dots \text{ ó } (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \text{ ó } (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \text{ ó } (\mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B) \text{ ó } \dots$$

$$\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = d^2\mathbf{u}/dt^2$$

Trabajo

$$W = \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} m\ddot{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} \rightarrow W = \Delta \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}^2$$

Impulso

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{u}} dt \rightarrow \mathbf{I} = \Delta m \dot{\mathbf{u}}$$

Conservación de Energía

$$\Delta E = \Delta \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}^2 - \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} m\ddot{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E = cte.$$

Conservación de Momentum

$$\Delta \mathbf{M} = \Delta m \dot{\mathbf{u}} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{u}} dt \rightarrow \Delta \mathbf{M} = 0 \rightarrow \mathbf{M} = cte.$$

Principio de Mínima Acción

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dt = 0$$

Apéndice

Si consideramos una sola partícula de masa m entonces

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = 0 \quad (1)$$

$$m\mathbf{a} - m\mathbf{a} = 0 \quad (2)$$

$$(m\mathbf{a} - m\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \quad (3)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} m\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{r} dt = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}{\partial q_k} = m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \quad (5)$$

La ecuación (3) es el Principio de D'Alembert.

La ecuación (4) es el Principio de Hamilton.

Las ecuaciones (5) son las Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Principio de D'Alembert

En la ecuación (3) si $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ entonces

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

Principio de Hamilton

En la ecuación (4) si $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ entonces

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0$$

Si $-\delta V = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$ y como $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ entonces

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

Como $L = T - V$ entonces

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

En las ecuaciones (5) si $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ y $Q_k = \mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial q_k$ entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}{\partial q_k} = Q_k$$

Si $-\partial V / \partial q_k = Q_k$ y $\partial V / \partial \dot{q}_k = 0$ y como $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0$$

Como $L = T - V$ entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Apéndice II

$$k = \dots \text{ ó } (m_A) \text{ ó } \dots$$

$$k = \dots \text{ ó } (m_A m_B) \text{ ó } \dots$$

$$\mathbf{u} = \dots \text{ ó } (\mathbf{r}_A) \text{ ó } (\mathbf{v}_A) \text{ ó } (\mathbf{a}_A) \text{ ó } \dots$$

$$\mathbf{u} = \dots \text{ ó } (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \text{ ó } (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \text{ ó } (\mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B) \text{ ó } \dots$$

$$\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = d^2\mathbf{u}/dt^2$$

Conservación de Escalar \dot{U}

$$\Delta \dot{U} = \left(\Delta \frac{1}{2} k \dot{\mathbf{u}}^2 - \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} k \dot{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} \right) / (k)$$

$$\Delta \dot{U} = 0$$

$$\dot{U} = cte.$$

Conservación de Vector \dot{U}

$$\Delta \dot{U} = \left(\Delta k \dot{\mathbf{u}} - \int_{t_1}^{t_2} k \ddot{\mathbf{u}} dt \right) / (k)$$

$$\Delta \dot{U} = 0$$

$$\dot{U} = cte.$$