Derivada de una Función

Índice.

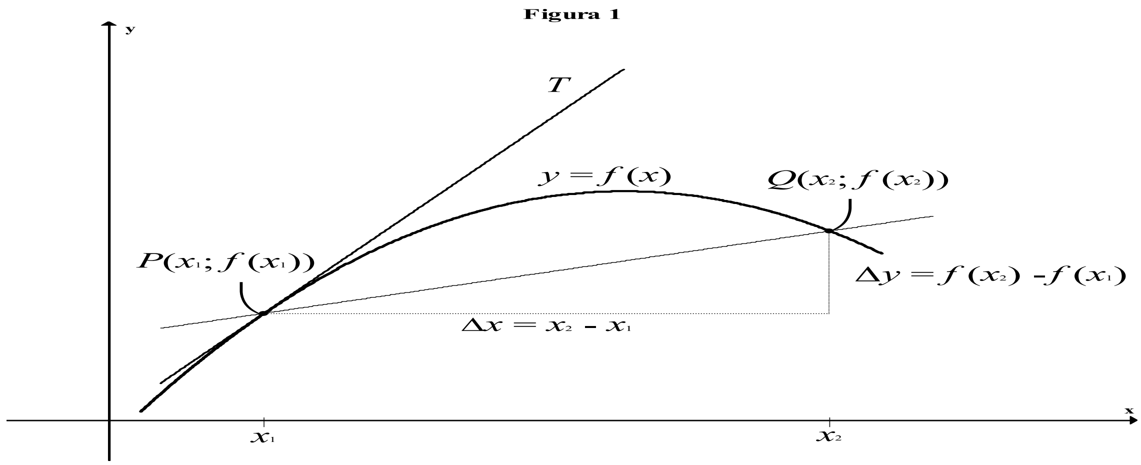
1. Introducción.

Una de las ideas básicas en Cálculo Matemático es el concepto de Derivada. Para introducir dicho concepto se recurre generalmente a dos problemas: uno **Físico**, para calcular la velocidad instantánea de un móvil, y otro **Geométrico**, para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera de ella. Los dos problemas conducen al mismo cálculo: el límite de un cociente de incrementos cuando el denominador tiende a cero. Puesto que, muchos problemas importantes dependen de la determinación de la **recta tangente** a la gráfica de una función en un punto específico, a continuación se introduce el concepto analítico de la pendiente de recta tangente a una función en un punto y luego el concepto de derivada.

2. Pendiente de una Recta Tangente.

Sea *f* una función que es continua en x_1. Para definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $P\left(x_1; f\left(x_1\right)\right)$, consideremos un intervalo abierto ***I*** que contiene a x_1. Sea $Q\left(x_2; f\left(x_2\right)\right)$ otro punto sobre la gráfica de *f* tal que x_2 esté contenido en ***I***. La recta que pase por los puntos *P* y *Q* se denomina recta secante.

Figura 1



Observe que Δx es el cambio del valor x de x_1 a x_2, llamado **incremento de *x*,** y Δy es el cambio del valor de $y=f(x)$ de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, llamado **incremento de *y*.**

La pendiente de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* de la curva de la figura 3.1, está determinada por:

$$m_{PQ}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Como $x_2=x_1+\Delta x,$ la pendiente puede escribirse así:

$$m_{PQ}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Consideremos ahora el punto *P* como un punto fijo, y que el punto *Q* se mueve a lo largo de la curva hacia *P*. Esto es igual a decir que Δx tiende a cero. Si esto sucede la recta secante gira sobre el punto *P* hasta convertirse en una recta tangente a la curva en el punto *P*, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en dicho punto puede ser calculada mediante la siguiente ecuación:

$$m(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \qquad \text{(A)}$$

"*La notación* $m(x_1)$ *nos indica que la pendiente que calculemos con la ecuación* (A) es *la de la recta tangente a la gráfica de la función* $y=f(x)$ *en el punto* $(x_1,f(x_1))$".

Ejercicios resueltos 1.

1.1) Calcule la pendiente de la recta tangente a la parábola $f(x)=3x^2+4$ en el punto $(3;1)$.

Solución:

Es evidente que $x_1=3,$ por lo tanto, aplicando la ecuación (A) tenemos:

$$m(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[3(3+\Delta x)^2+4\right]-31}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\left(9+6\Delta x+(\Delta x)^2\right)-27}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{27+18\Delta x+3(\Delta x)^2-27}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{18\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(18+3\Delta x)=18$$

Luego, la pendiente exigida es: $m=18.$

1.2) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=\operatorname{sen} x$ en el punto $\left(\frac{1}{2}\pi,1\right).$

Solución:

Apliquemos la ecuación (A), con $x_1=\frac{1}{2}\pi$:

$$m\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi+\Delta x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cos(\Delta x) + \operatorname{sen}(\Delta x)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right)\left(\cos(\Delta x) - 1\right) + \operatorname{sen}(\Delta x)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right)\left(\cos(\Delta x) - 1\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\Delta x}$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

Ahora, cuando $\Delta x \to 0,\ 1 - \cos(\Delta x) \sim \dfrac{(\Delta x)^2}{2}$ y $\operatorname{sen}(\Delta x) \sim \Delta x,$ entonces,

$\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} = \frac{0}{2} = 0$ y $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1,$ por consiguiente:

$$m\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = -\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \cdot 0 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \cdot 1$$

$$= \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0.$$

Por lo tanto, la pendiente buscada es: $m = 0.$

3. Derivada de una Función.

La derivada de una función f, es una función denotada por f', tal que para cualquier x del dominio de f está dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(B)}$$

si este límite existe.

Si x_1 es un número del dominio de f, entonces:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad \text{(C)}$$

si este límite existe.

El proceso de calcular la derivada de una función se denomina **derivación** o **diferenciación**, es decir, la **derivación** o **diferenciación** es el proceso mediante el cual se obtiene f' a partir de *f.* Si una función tiene derivada en todo su dominio, se dice que es una función diferenciable.

Ejercicios resueltos 2.

2.1) Determine la derivada de $f(x)=\sqrt{x^3}$, aplicando la ecuación (B).

Solución:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^3}-\sqrt{x^3}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}-\sqrt{x^3}\right)\left(\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}+\sqrt{x^3}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}+\sqrt{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x^3)}\right)^2-\left(\sqrt{x^3}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}+\sqrt{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x\left(\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}+\sqrt{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\sqrt{x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}+\sqrt{x^3}}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

Por lo tanto,

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

2.2) Determine la derivada de la función $g(x)=x^3$.

Solución:

Apliquemos la ecuación (B),

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2\right) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2$$

$$= 3x^2$$

En conclusión,

$$g'(x) = 3x^2$$

2.3) Determine la derivada de la función $h(x) = \operatorname{tg} x$.

Solución.

Aplicando la ecuación (B), tenemos,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\Delta x)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\Delta x)} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\Delta x) - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)\operatorname{tg}(\Delta x)}{\Delta x} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\Delta x)}{\Delta x} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \cdot 1 = \sec^2 x$$

Por consiguiente :

$$h'(x) = \sec^2 x$$

Otras notaciones para la derivada de una función *f* son: $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]$ y $D_x\left[f(x)\right]$.

Ejercicios propuestos A.

Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones :

1) $f(x) = 8 - x^2$	2) $f(x) = 7x - 5$	3) $f(x) = 3 + 4x - 2x^2$	4) $f(x) = x^3 - 2x$
5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$	6) $f(x) = \dfrac{4}{2x-5}$	7) $f(x) = 3x + \dfrac{6}{x^2}$	8) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 6x + 1$
9) $f(x) = \sqrt{x}$	10) $f(x) = \cos x$	11) $f(x) = 5x^3 - x^2 + 2$	12) $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$

Teorema 1.

Si una función f es diferenciable en un punto x_1, entonces, f es continua en x_1.

Una función f puede no ser diferenciable en c por alguna de las siguientes razones:

1. La función es discontinua en c. (Ver figura 2)
2. La función es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en el punto donde $x = c$. (Ver figura 3)
3. La función f es continua en c, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto donde $x = c$. (Ver figura 4). La continuidad no implica diferenciabilidad.

Figura 2

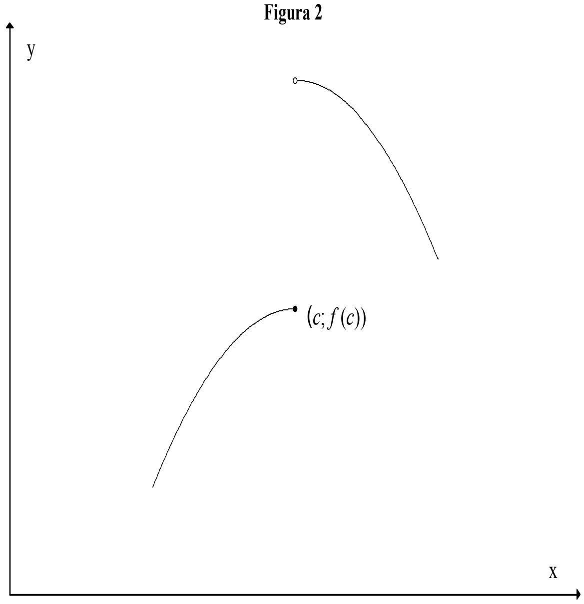


Figura 3

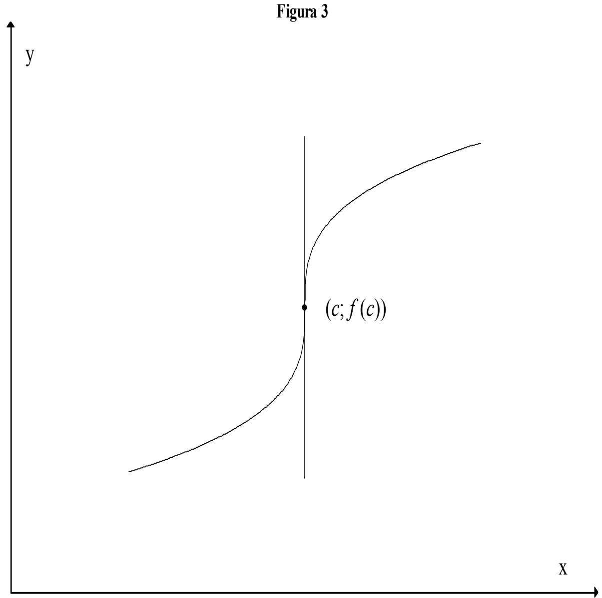


Figura 4

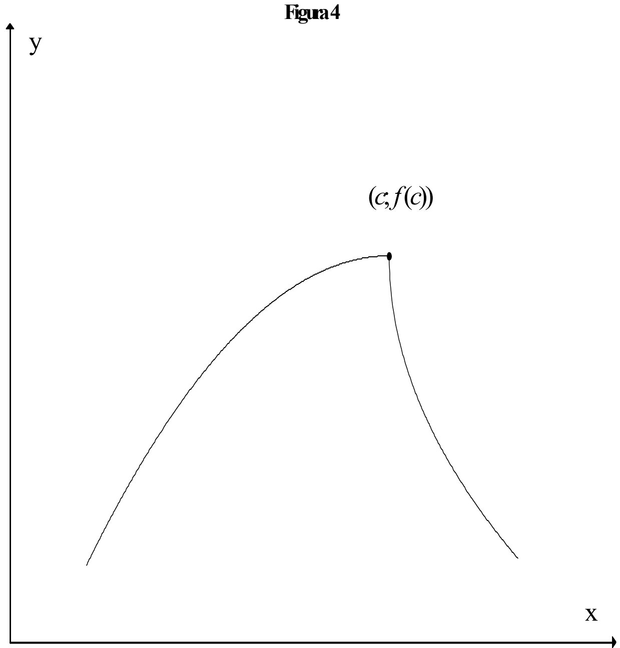
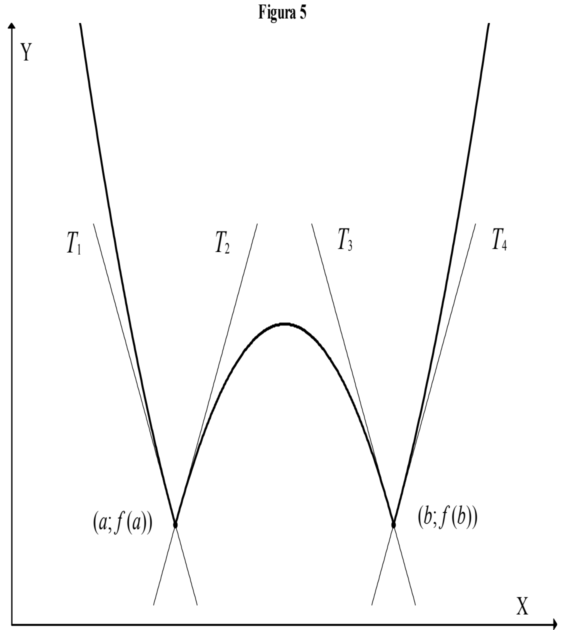


Figura 5



La figura 5 muestra la gráfica de una función que no es diferenciable en los puntos donde $x=a$ y $x=b$. La gráfica está compuesta por tres curvas. En el punto $(a; f(a))$ se han trazado las siguientes rectas: T_1 tangente a la curva de la izquierda y T_2 tangente a la curva central, las cuales evidentemente tienen pendientes diferentes. Igualmente se han trazado en el punto $(b; f(b))$ las rectas tangentes T_3 y T_4 que igualmente tienen diferentes pendientes. Esta experiencia nos conduce a pensar en derivadas laterales, lo que estudiaremos a continuación.

4. Derivadas Laterales.

i) Si f es una función definida en x_1, entonces, la **derivada por la derecha** de f en x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, está definida por:

$$f'_+(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \quad\Leftrightarrow\quad f'_+(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

si el límite existe.

ii) Si f es una función definida en x_1, entonces, la **derivada por la izquierda** de f en x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, está definida por:

$$f'_-(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \quad\Leftrightarrow\quad f'_-(x_1)=\lim_{x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

si el límite existe.

Ejercicios resueltos 3.

3.1) Determine si la función f es diferenciable en x_1.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\le -4 \\ -x-6 & \text{si} \quad -4<x \end{cases} \qquad x_1=-4$$

Solución.

Puesto que f está definida por trozos, se calculan las derivadas laterales en -4.

$$f'_-(-4)=\lim_{x\to -4^-}\frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=\lim_{x\to -4^-}\frac{(x+2)-(-2)}{x+4}=\lim_{x\to -4^-}\frac{x+4}{x+4}=\lim_{x\to -4^-}1=1$$

$$f'_+(-4)=\lim_{x\to -4^+}\frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=\lim_{x\to -4^+}\frac{(-x-6)-(-2)}{x+4}=\lim_{x\to -4^+}\frac{-x-4}{x+4}=-\lim_{x\to -4^+}\frac{x+4}{x+4}$$

$$=-\lim_{x\to -4^+}1=-1$$

Como $f'_-(-4) \neq f'_+(-4)$, entonces, f no es diferenciable en -4.

3.2) Decida si la función $g(x) = |2x-4|$ es diferenciable en 2.

Solución.

Puesto que: $|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 4-2x & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$, entonces,

$$g'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\left(4 - 2(x+\Delta x)\right) - (4-2x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{4 - 2x - 2(\Delta x) - 4 + 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-2(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -2 = -2$$

$$g'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\left(2(x+\Delta x) - 4\right) - (2x-4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2x + 2(\Delta x) - 4 - 2x + 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 2 = 2$$

Ahora, siendo $g'_-(2) \neq g'_+(2)$, entonces, g no es diferenciable en 2.

3.3) Determine si la función $h(x) = \cos x$ es diferenciable en $\frac{1}{3}\pi$.

Solución.

$$h'_-\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \Delta x\right) - \cos\frac{1}{3}\pi}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\cos\frac{1}{3}\pi \cdot \cos(\Delta x) - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi \cdot \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos\frac{1}{3}\pi}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\cos\frac{1}{3}\pi\left(\cos(\Delta x) - 1\right) - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi \cdot \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\cos\tfrac{1}{3}\pi \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} - \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

Ahora, cuando $\Delta x \to 0^-$, $1 - \cos(\Delta x) \sim \dfrac{(\Delta x)^2}{2}$ y $\operatorname{sen}(\Delta x) \sim \Delta x$, entonces,

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{2}=\frac{0}{2}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}1=1,$$

luego,

$$h'_-\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)=-\cos\tfrac{1}{3}\pi\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\cos\tfrac{1}{3}\pi\cdot 0-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\cdot 1=-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h'_+\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi+\Delta x\right)-\cos\tfrac{1}{3}\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\cos\tfrac{1}{3}\pi\cdot\cos(\Delta x)-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\cdot\operatorname{sen}(\Delta x)-\cos\tfrac{1}{3}\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\cos\tfrac{1}{3}\pi\left(\cos(\Delta x)-1\right)-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\cdot\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\cos\tfrac{1}{3}\pi\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x\to 0^+$, $1-\cos(\Delta x)\sim\dfrac{(\Delta x)^2}{2}$ y $\operatorname{sen}(\Delta x)\sim\Delta x$, entonces,

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{2}=\frac{0}{2}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}1=1,$$

luego,

$$h'_+\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)=-\cos\tfrac{1}{3}\pi\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\cos\tfrac{1}{3}\pi\cdot 0-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\cdot 1=-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Puesto que, $h'_-\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)=h'_+\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)$, entonces, h es diferenciable en $\tfrac{1}{3}\pi$.

Ejercicios propuestos B.

Determine si la función dada es diferenciable en x_1.

1) $f(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x<2 \\ 3x-7 & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$ $\quad x_1=2$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$ $\quad x_1=2$

3) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x<1 \\ (1-x)^2 & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$ $\quad x_1=1$

4) $f(x)=\begin{cases} -x^{2/3} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^{2/3} & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$ $\quad x_1=0$

5) $f(x)=1+|x+2|$ $\quad x_1=-2$ 6) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ $\quad x_1=-1$ 7) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad x_1=0$

El proceso del cálculo de la derivada de una función aplicando la fórmula (B) es muy largo y laborioso, por lo tanto, a continuación se proporcionan algunos teoremas que permiten determinar las derivadas con mayor facilidad; con la finalidad de familiarizarnos con las notaciones, la derivada se expresará con alguna de las tres expresiones equivalentes $f'(x)$, $D_x\left[f(x)\right]$, $\dfrac{dy}{dx}$ ó $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]$.

Teorema 2. ***Derivada de una función constante.***

Si $f(x)=c$, donde c es una constante, entonces:

$$\boxed{f'(x)=0}$$

Ejemplo.

Si $f(x)=6$, entonces, $f'(x)=0$.

Teorema 3. ***Derivada de una función potencial.***

Si $f(x)=x^n$, donde n es un número racional, entonces:

$$\boxed{D_x\left(x^n\right)=nx^{n-1}}$$

Ejemplo.

Si $f(x)=x^6$, entonces, $f'(x)=6x^5$.

Teorema 4. ***Derivada del producto de una función por una constante.***

Si g es una función definida por $g(x)=c\cdot f(x)$, donde f es una función y c una constante, entonces:

$$\boxed{g'(x)=c\cdot f'(x)}$$

Ejemplo.

Si $f(x)=4x^8$, entonces, $D_x\left(4x^8\right)=4\cdot D_x\left(x^8\right)=4\cdot 8x^7=32x^7$.

A partir del resultado obtenido en el ejemplo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5. ***Derivada del producto de una función potencial por una constante.***

Si $f(x)=c\cdot x^n$, donde n es un número entero positivo y c una constante, entonces:

$$\boxed{D_x\left(c\cdot x^n\right)=c\cdot D_x\left(x^n\right)=c\cdot n\,x^{n-1}}$$

Teorema 6. ***Derivada de una adición de funciones.***

Si $f_1, f_2, f_3, f_4,\ldots, f_n$ son funciones y si f es una función definida por: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ y si $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x), f_4',\ldots, f_n'(x)$ existen, entonces:

$$\boxed{f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)+f_4'(x)+\ldots f_n'(x)}$$

Ejemplo.

Determine $f'(x)$ si $f(x)=4x^4-3x^3-x+5.$

$$f'(x)=D_x\left[4x^4-3x^3-x+5\right]=D_x\left(4x^4\right)-D_x\left(3x^3\right)-D_x(x)+D_x(5)$$

$$=4\cdot D_x\left(x^4\right)-3\cdot D_x\left(x^3\right)-D_x(x)+D_x(5)=4\cdot 4x^{3-1}-3\cdot 3x^{3-1}-x^{1-1}+0$$

$$=16x^3-9x^2-1$$

Teorema 7. ***Derivada de un producto de funciones.***

Si *f* y *g* son funciones y *h* una función definida por $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[h(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]+g(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]}$$

Ejemplo.

Sea $h(x)=\left(2x^3+2\right)\left(x^2-x\right)$, determine $h'(x)$.

Apliquemos el teorema 7:

$$h'(x)=\left(2x^3+2\right)\cdot D_x\left(x^2-x\right)+\left(x^2-x\right)\cdot D_x\left(2x^3+2\right)=\left(2x^3+2\right)\left(2x-1\right)+\left(x^2-x\right)\left(6x^2\right)$$

$$=4x^4-2x^3+4x-2+6x^4-6x^3=10x^4-8x^3+4x-2$$

Teorema 8. ***Derivada de un cociente de funciones.***

Si *f* y *g* son funciones y *h* una función definida por $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde $g(x)\neq 0$ y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces:

$$\boxed{D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\cdot D_x\left[f(x)\right]-f(x)\cdot D_x\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}}$$

Ejemplo.

Calcule $D_x\left(\dfrac{3x^2}{x+3}\right)$.

Debemos aplicar el teorema 8:

$$D_x\left(\frac{3x^2}{x+3}\right)=\frac{(x+3)\cdot D_x\left(3x^2\right)-3x^2\cdot D_x\left(x+3\right)}{(x+3)^2}=\frac{(x+3)(6x)-3x^2\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{6x^2+18x-3x^2}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{3x^2+18x}{(x+3)^2}$$

Ejercicios propuestos C.

Calcule la derivada de las funciones dadas :

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3}$ 2) $f(x)=\left(2x^4-1\right)\left(5x^3+6x\right)$ 3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+4}$ 4) $f(x)=x^{10}+7x^5$

5) $D_x\left[\left(2x^2+5\right)(4x-1)\right]$ 6) $D_x\left[\left(\frac{1}{3}x^3-4x^2+5\right)\left(3x^4+x^2\right)\right]$ 7) $D_x\left[\dfrac{x^3+1}{x^2+3}\left(x^2-\dfrac{2}{x}+1\right)\right]$

8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)$ 9) $\dfrac{d}{dx}\left[\left(7-3x^3\right)^2\right]$ 10) $\dfrac{d}{dx}\left(6x^7-3x^4+13x^3\right)$ 11) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4-3x}{5x^5}\right)$

Para determinar la derivada de una función compuesta, se aplica uno de los teoremas más importantes del Cálculo llamado **"Regla de la Cadena".**

5. Teorema 9. ***Derivada de una función compuesta (Regla de la Cadena).***

Si g es una función diferenciable en x y la función h es diferenciable en $g(x)$, entonces, la función compuesta $f(x)=(h\circ g)(x)$ es diferenciable en *x*, y su derivada es:

$$\boxed{f'(x)=(h\circ g)'(x)=h'\left(g(x)\right)g'(x)}$$

Ejemplo.

Sean $f(x)=x^3$ y $g(x)=3x^2+4x-9$. Determinar $(f\circ g)'$.

La función $f\circ g$ está definida por $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\left(3x^2+4x-9\right)^3$.

Para aplicar la regla de la cadena necesitamos calcular $f'\left(g(x)\right)$ y $g'(x)$. Como $f(x)=x^3$, entonces, $f'(x)=3x^2$, y así: $f'\left(g(x)\right)=3\left(g(x)\right)^2=3\left(3x^2+4x-9\right)^2$. Además, como $g(x)=3x^2+4x-9$, luego, $g'(x)=6x+4$.

Por lo tanto, $\left(f\circ g\right)'(x)=f'\left(g(x)\right)g'(x)=3\left(3x^2+4x-4\right)^2(6x+4)$.

Calcular la derivada de numerosas funciones aplicando la fórmula (B) es muy laborioso y complicado, por tal razón, a continuación se suministra la siguiente tabla:

6. *Tabla de derivadas usuales.*

$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\left[g(x)\right]^n$	$f'(x)=n\left[g(x)\right]^{n-1}\cdot g'(x)$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\ln\left[g(x)\right]$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$
$f(x)=g(x)\cdot h(x)$	$f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$
$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=e^{g(x)}$	$f'(x)=g'(x)\cdot e^{g(x)}$
$f(x)=k^x$	$f'(x)=k^x\cdot\ln k$
$f(x)=k^{g(x)}$	$f'(x)=\ln k\cdot g'(x)\cdot k^{g(x)}$
$f(x)=\log_b(x)$	$f'(x)=\dfrac{\log_b(e)}{x}$
$f(x)=\log_b\left[g(x)\right]$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)\cdot\log_b(e)}{g(x)}$
$f(x)=\left[g(x)\right]^{h(x)}$	$f'(x)=h'(x)\left[g(x)\right]^{h(x)}\cdot\ln\left[g(x)\right]+h(x)\left[g(x)\right]^{h(x)-1}\cdot g'(x)$
$f(x)=\left[g(x)\right]^{g(x)}$	$f'(x)=g'(x)\left[g(x)\right]^{g(x)}\cdot\ln\left[g(x)\right]+g'(x)\left[g(x)\right]^{g(x)}$

$f(x)=x^x$ .... $f'(x)=x^x(\ln x+1)$

$f(x)=\operatorname{sen}(g(x))$ .... $f'(x)=\cos(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\cos(g(x))$ .... $f'(x)=-\operatorname{sen}(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\operatorname{tg}(g(x))$ .... $f'(x)=\sec^2(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\operatorname{cotg}(g(x))$ .... $f'(x)=-\csc^2(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\sec(g(x))$ .... $f'(x)=\sec(g(x))\cdot\operatorname{tg}(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\csc(g(x))$ .... $f'(x)=-\csc(g(x))\cdot\operatorname{cotg}(g(x)).g'(x)$

$f(x)=\operatorname{arcsen}(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

$f(x)=\arccos(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

$f(x)=\operatorname{arctg}(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$

$f(x)=\operatorname{arccotg}(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}$

$f(x)=\operatorname{arcsec}(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)\cdot\sqrt{(g(x))^2-1}}$

$f(x)=\operatorname{arccsc}(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{g(x)\cdot\sqrt{(g(x))^2-1}}$

$f(x)=\operatorname{senh}(g(x))$ .... $f'(x)=\cosh(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\cosh(g(x))$ .... $f'(x)=\operatorname{senh}(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\operatorname{tgh}(g(x))$ .... $f'(x)=\operatorname{sech}^2(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\operatorname{cotgh}(g(x))$ .... $f'(x)=-\operatorname{csch}^2(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\operatorname{sech}(g(x))$ .... $f'(x)=-\operatorname{sech}(g(x))\cdot\operatorname{tgh}(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\operatorname{csch}(g(x))$ .... $f'(x)=-\operatorname{csch}(g(x))\cdot\operatorname{cotgh}(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x)=\arg\operatorname{senh}(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}$

$f(x)=\arg\cosh(g(x))$ .... $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{\sqrt{(g(x))^2-1}}$

$f(x)=\arg\text{tgh}$...$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{1-(g(x))^2}$
$f(x)=\arg\text{cotgh}(g(x))$............................$f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}$
$f(x)=\arg\text{sech}(g(x))$..............................$f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{g(x)\cdot\sqrt{1-(g(x))^2}}$
$f(x)=\arg\text{csch}(g(x))$..............................$f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{g(x)\cdot\sqrt{1+(g(x))^2}}$

Ejercicios resueltos 4.

4.1) Calcule la derivada de la función $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{2x^2+1}$.

Solución.

Debemos aplicar el teorema 8 y la regla de la cadena, así:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln^3 x}{2x^2+1}\right)'=\frac{(\ln^3 x)'(2x^2+1)-(\ln^3 x)(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(3\ln^2 x)(\ln x)'(2x^2+1)-(\ln^3 x)(2x)}{(2x^2+1)^2}=\frac{\dfrac{(3\ln^2 x)(2x^2+1)}{x}-2x(\ln^3 x)}{(2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(3\ln^2 x)(2x^2+1)-2x^2\ln^3 x}{x(2x^2+1)^2}=\frac{6x^2\ln^2 x+3\ln^2 x-2x^2\ln^3 x}{x(2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{\ln^2 x(6x^2+3-2x^2\ln x)}{x(2x^2+1)^2}=\frac{\ln^2 x\left[2x^2(3-\ln x)+3\right]}{x(2x^2+1)^2}$$

Por ende,

$$f'(x)=\frac{\ln^2 x\left[2x^2(3-\ln x)+3\right]}{x(2x^2+1)^2}$$

4.2) Dada la función $g(x)=8^{2x^2+x-5}+\cos^3(4x^5-3)$, determine $g'(x)$.

Solución.

Apliquemos la regla de la cadena en cada sumando.

En efecto,

$$g'(x)=\left[8^{2x^2+x-5}+\cos^3(4x^5-3)\right]'=\left[8^{2x^2+x-5}\right]'+\left[\cos^3(4x^5-3)\right]'$$

$$=(2x^2+x-5)'\left(8^{2x^2+x-5}\right)\ln 8+\left[3\cos^2(4x^5-3)\right]\left[\cos(4x^5-3)\right]'$$

$$=(\ln 8)(4x+1)\left(8^{2x^2+x-5}\right)+\left[3\cos^2(4x^5-3)\right]\left[-\operatorname{sen}(4x^5-3)\right](4x^5-3)'$$

$$=(\ln 8)(4x+1)\left(8^{2x^2+x-5}\right)-60x^4\cos^2(4x^5-3)\operatorname{sen}(4x^5-3)$$

Por consiguiente,

$$g'(x)=(\ln 8)(4x+1)\left(8^{2x^2+x-5}\right)-60x^4\cos^2(4x^5-3)\operatorname{sen}(4x^5-3)$$

4.3) Derive la función $h(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}}\right)$.

Solución.

Apliquemos la fórmula para derivar el logaritmo neperiano de una función y resolvamos las derivadas indicadas.

Efectivamente,

$$h'(x)=\left[\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+7x+12}{x+4}}\right)\right]'=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}}\right)'}{\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}\right)'}{\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}}}$$

$$=\frac{\dfrac{(x^2+7x+12)'(x+4)-(x^2+7x+12)(x+4)'}{(x+4)^2}}{2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}}\right)^2}=\frac{(2x+7)(x+4)-(x^2-7x+12)(1)}{2(x+4)^2\left(\dfrac{x^2-7x+12}{x+4}\right)}$$

$$=\frac{x^2+22x+16}{2x^3-6x^2-32x+96}$$

Por lo tanto,

$$h'(x)=\frac{x^2+22x+16}{2x^3-6x^2-32x+96}$$

4.4) Determine la derivada de la función $f(x)=e^{3x}\cdot\operatorname{tg}^2 x.$

Solución.

Apliquemos el teorema 7 y resolvamos las derivadas señaladas, así,

$$f'(x)=\left(e^{3x}\cdot\operatorname{tg}^2 x\right)'=\left(e^{3x}\right)'\cdot\operatorname{tg}^2 x+e^{3x}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)'=3e^{3x}\cdot\operatorname{tg}^2 x+e^{3x}\cdot 2\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x\right)'$$

$$=3e^{3x}\cdot\operatorname{tg}^2 x+2e^{3x}\cdot\operatorname{tg} x\cdot\sec^2 x$$

En conclusión,

$$f'(x)=3e^{3x}\cdot\operatorname{tg}^2 x+2e^{3x}\cdot\operatorname{tg} x\cdot\sec^2 x$$

4.5) Calcule la derivada de la función $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right).$

Solución.

Aplicando la fórmula que aparece en tabla de derivadas usuales, tenemos que,

$$f'(x)=\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)\right]'=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)'}{1-\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)'\cdot x-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot x'}{x^2}}{\dfrac{x^2-\left(1+x^2\right)+2\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^2\right)'-0\right]\cdot x-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot 1}{2\sqrt{1+x^2}-2}=\frac{\dfrac{x^2-\left(1+x^2\right)+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Por lo tanto,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

4.6) Dada la función $g(x)=\ln\left(\frac{(2x+3)(x^2+2x+3)}{3x^4}\right)$, calcular g'.

Solución.
En efecto,

$$g'(x)=\left[\ln\left(\frac{(2x+3)(x^2+2x+3)}{3x^4}\right)\right]'=\left[\ln(2x+3)+\ln\left(x^2+2x+3\right)-\ln\left(3x^4\right)\right]'$$

$$=\left[\ln(2x+3)\right]'+\left[\ln\left(x^2+2x+3\right)\right]'-\left[\ln\left(3x^4\right)\right]'$$

$$=\frac{(2x+3)'}{2x+3}+\frac{\left(x^2+2x+3\right)'}{x^2+2x+3}-\frac{\left(3x^4\right)'}{3x^4}=\frac{2}{2x+3}+\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{12x^3}{3x^4}$$

$$=\frac{2}{2x+3}+\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{4}{x^3}$$

Consecuentemente,

$$g'(x)=\frac{2}{2x+3}+\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{4}{x^3}$$

7. Derivada de la función inversa.

Si la función $y=f(x)$ es diferenciable con respecto de *x*, entonces, $x=f^{-1}(y)$ es diferenciable con respecto de *y*, y se verifica la siguiente relación:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=\frac{1}{\frac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right]} \qquad \text{(D)}$$

Ejercicios resueltos 5.

5.1) Determine la derivada de la función $f(x) = \arccos x$, aplicando la relación (D).

Solución.

Si $y = \arccos x$, entonces, $x = \cos y$, por ende, aplicando la relación (D), tenemos que,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)} = \frac{1}{-\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5.2) Sea $g(x) = \text{tg } x$, calcule g' usando la relación (D).

Solución.

Puesto que, $y = \text{tg } x$, entonces, $x = \text{arctg } y$, luego, si usamos la relación (D), obtenemos,

$$\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\text{arctg } y)} = \frac{1}{\frac{1}{1+y^2}} = 1 + y^2 = 1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$$

Por consiguiente,

$$g'(x) = \sec^2 x$$

5.3) Empleando la relación (D), determine la derivada de $h(x) = \ln(3x)$.

Solución.

Como, $y = \ln(3x)$, entonces, $x = \frac{1}{3}e^y$, en consecuencia,

$$\frac{d}{dx}\left[h(x)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{3}e^y\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3}e^y} = \frac{3}{e^{\ln(3x)}} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

Por ende,

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

5.4) Valiéndonos de la relación (D), calcule la derivada de $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

Solución.

Siendo $y=\sqrt{2x+1}$, entonces, $x=\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)$, así que,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=\frac{1}{\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)\right]}=\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

En consecuencia,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

5.5) Dada la función $g(x)=10^{\operatorname{sen} x}$, calcule g' utilizando la relación (D).

Solución.

Ya que, $g(x)=10^{\operatorname{sen} x}$, entonces, $x=\operatorname{arcsen}(\log y)$, luego,

$$\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]=\frac{1}{\frac{d}{dy}\left[\operatorname{arcsen}(\log y)\right]}=\frac{1}{\frac{(\log y)'}{\sqrt{1-(\log y)^2}}}=\frac{\sqrt{1-(\log y)^2}}{\frac{\log e}{y}}=\frac{y\sqrt{1-(\log y)^2}}{\log e}$$

$$=\frac{10^{\operatorname{sen} x}\sqrt{1-\left(\log 10^{\operatorname{sen} x}\right)^2}}{\log e}=\frac{10^{\operatorname{sen} x}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{\log e}=\frac{\cos x\cdot 10^{\operatorname{sen} x}}{\log e}$$

$$=\ln 10\cdot\cos x\cdot 10^{\operatorname{sen} x};\ \text{ recuerde que}: \log_b e\cdot\ln b=1.$$

Por lo tanto,

$$g'(x)=\ln 10\cdot\cos x\cdot 10^{\operatorname{sen} x}$$

8. *Derivada implícita.*

Existen funciones que no pueden expresarse explícitamente. Por ejemplo, no se puede resolver la ecuación $2x^2-4x+3=y^3+5y^2+4$ para y en términos de x. Pueden existir una o más funciones $y=f(x)$ tales que $2x^2-4x+3=\left[f(x)\right]^3+5\left[f(x)\right]^2+4$; cuando esto es así, se dice que la función f está definida implícitamente.

Ahora, la derivada de y con respecto a x puede determinarse mediante la **diferenciación implícita.**

Ejercicios resueltos 6.

6.1) Determinemos $\dfrac{dy}{dx}$, dada la ecuación $2x^2-4x+3=y^3+5y^2+4$.

Solución.

Para calcular la derivada pedida, diferenciemos ambos miembros de la ecuación con respecto de x y despejemos $D_x\left(y\right)$, así:

$$D_x\left(2x^2-4x+3\right)=D_x\left(y^3+5y^2+y\right)$$

$$D_x\left(2x^2\right)-D_x\left(4x\right)+D_x\left(3\right)=D_x\left(y^3\right)+D_x\left(5y^2\right)+D_x\left(y\right)$$

$$4x^2-4+0=3y^2D_x\left(y\right)+10yD_x\left(y\right)+D_x\left(y\right)$$

$$4x^2-4=\left(3y^2+10y+1\right)D_x\left(y\right)$$

$$D_x\left(y\right)=\frac{4x^2-4}{3y^2+10y+1}$$

6.2) Sea $\cos\left(x+y\right)=y\operatorname{sen}x$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución.

Diferenciemos ambos miembros con respecto de x y despejemos $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos\left(x+y\right)\right)=\frac{d}{dx}\left(y\operatorname{sen}x\right)$$

$$-\operatorname{sen}\left(x+y\right)\frac{d}{dx}\left(x+y\right)=\frac{dy}{dx}\cdot\operatorname{sen}x+y\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}x\right)$$

$$-\operatorname{sen}\left(x+y\right)\left[\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}\right]=\operatorname{sen}x\frac{dy}{dx}+y\cos x$$

$$-\operatorname{sen}\left(x+y\right)-\operatorname{sen}\left(x+y\right)\frac{dy}{dx}=\operatorname{sen}x\frac{dy}{dx}+y\cos x$$

$$\left[\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\left(x+y\right)\right]\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen}\left(x+y\right)-y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\operatorname{sen}(x+y)-y\cos x}{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x+y)}$$

6.3) Siendo, $y=\cos(x+y)$, hallar $\frac{dy}{dx}$.

Solución.

Diferenciando ambos miembros con respecto de x y despejando $\frac{dy}{dx}$, obtenemos,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\cos(x+y)\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen}(x+y)\cdot\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen}(x+y)\cdot\left(\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen}(x+y)\cdot 1-\operatorname{sen}(x+y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$$

6.4) Determine $\frac{dy}{dx}$, de la ecuación $\operatorname{sen}(xy)=x$.

Solución.

Debemos diferenciar ambos miembros con respecto de x y luego despejemos $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}(xy)\right]=\frac{d}{dx}(x)$$

$$\cos(xy)\cdot\frac{d}{dx}(xy)=1$$

$$\cos(xy)\cdot\left[\frac{dx}{dx}\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right]=1$$

$$y \cdot \cos(xy) + x \cdot \cos(xy) \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y \cdot \cos(xy)}{x \cdot \cos(xy)}$$

Ejercicios propuestos D

Determine la derivada de y con respecto a x :

1) $x^2 + y^2 = 25$ 2) $x^3 + y^3 = 8xy$ 3) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = x^2 y$ 4) $y = \operatorname{sen}\left(x^3 y^2\right)$ 5) $x^4 y^6 = x^2 + y^2$

6) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 9$ 7) $x^3 \operatorname{sen} y^2 + y^2 \cos x^3 = 1$ 8) $\operatorname{cotg} xy + xy = 0$ 9) $x^2 y^5 = 2xy$

Supongamos que una partícula se mueve en un plano, de manera tal que sus coordenadas $(x; y)$, de su posición en cualquier tiempo *t*, están dadas por las ecuaciones: $x = f(t)$ y $y = g(t)$.

Para cada número *t* del dominio común de *f* y *g*, la partícula se encuentra en el punto $\left(f(t); g(t)\right)$, y el conjunto de todos estos puntos describe una **curva plana *C*** recorrida por la partícula. Las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, se llaman **ecuaciones paramétricas** de ***C*** y la variable *t* se llama parámetro.

Si eliminamos el parámetro de las ecuaciones paramétricas, se obtiene una ecuación en *x* e *y*, la cual es denominada **ecuación cartesiana** de ***C***.

A partir de una ecuación cartesiana podemos obtener una ecuación paramétrica, y viceversa.

Ejemplos.

1) Para determinar unas ecuaciones paramétricas de $y = 2x^2$, se procede de la manera siguiente: puesto que, la variable *y* está expresada en función de *x*, hacemos $x = t$ e $y = 2t^2$, por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de $y = 2x^2$ son:

$$x = t \quad \text{y} \quad y = 2t^2$$

2) Obtenga la ecuación cartesiana de la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = 5\cos t \quad \text{y} \quad y = 5\operatorname{sen} t$$

Para eliminar el parámetro *t*, se elevan al cuadrado los dos miembros de cada ecuación paramétrica y se suman, así:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = (5\cos t)^2 \\ y^2 = (5\operatorname{sen} t)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25\cos^2 t + 25\operatorname{sen}^2 t \\ x^2 + y^2 = 25\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right.$$

A continuación se darán tres definiciones de términos relacionados con las curvas planas, las cuales serán aplicadas posteriormente.

9. ***Curca lisa.***

Una curva plana C definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

se dice que es **lisa** o **suave** en el intervalo cerrado $[a;b]$ si f' y g' son continuas en $[a;b]$, y además, $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero simultáneamente en cada $t \in (a;b)$.

Ejemplo.

Sea C la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$f(t) = 5\cos t \quad \text{y} \quad g(t) = 5\,\text{sen}\, t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Como $f'(t) = -5\,\text{sen}\, t$ y $g'(t) = 5\cos t$ son continuas para todo $t \in [0; 2\pi]$, y además, no son cero simultáneamente en cualquier t, entonces la curva C es lisa.

Si un intervalo I puede partirse en un número finito de subintervalos en los que la curva C es suave, entonces se dice que C es **lisa a trozos** en I.

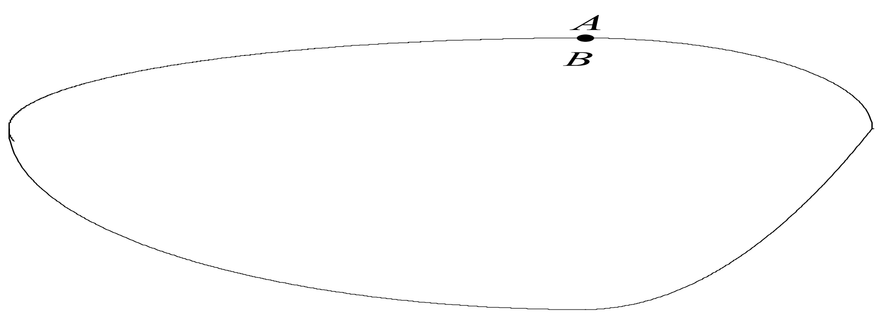
10. ***Curva cerrada.***

Una curva plana C definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

se dice que es cerrada si el punto inicial $A(f(a); g(a))$ coincide con el punto final $B(f(b); g(b))$.

Fig. 3.5



La figura 3.5 muestra una curva cerrada y lisa donde los puntos A y B coinciden.

11. ***Curva simple.***

Una curva plana C definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

se dice que es **simple** entre los puntos $A(f(a); g(a))$ y $B(f(b); g(b))$ si $(f(t_1); g(t_1))$ es diferente del punto $(f(t_2); g(t_2))$ para todo t_1 y t_2 diferentes del intervalo abierto $(a;b)$.

"Una curva simple no se cruza a sí misma".

En la figura 3.5 se muestra una curva cerrada simple lisa.

12. *Derivadas paramétricas.*

Supongamos que una curva lisa C está definida paramétricamente por $x=f(t)$ y $y=g(t)$, y que éste par de ecuaciones define al menos una función diferenciable h para la cual $y=h(x)$. La derivada de cada función h, denotada por $\frac{dy}{dx}$, está relacionada con $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ mediante la siguiente ecuación: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$. Si $\frac{dx}{dt}\neq 0$, podemos dividir miembro a miembro entre $\frac{dx}{dt}$ para obtener:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Para hallar la derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$, a la igualdad anterior la derivamos con respecto a x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Para hallar la derivada $\frac{d^3y}{dx^3}$ derivamos $\frac{d^2y}{dx^2}$ con respecto a x, y se procede de manera similar para determinar $\frac{d^4y}{dx^4},\frac{d^5y}{dx^5}$, etc.

Puesto que, las derivadas paramétricas que hemos considerando son funciones dependientes del parámetro "t", las siguientes fórmulas son alternativas para hallar las derivadas paramétricas:

Primera derivada paramétrica: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

Segunda derivada paramétrica: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dy}{dx}\right]\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

Tercera derivada paramétrica: $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

Cuarta derivada paramétrica: $\dfrac{d^4y}{dx^4}=\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d^3y}{dx^3}\right]\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

$\vdots$

n-ésima derivada paramétrica: $\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}.$

Ejercicio resuelto 7.

Dadas las ecuaciones paramétricas $x=2t^2-3$ y $y=t^5+t$, determine $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Solución.

Como $\dfrac{dx}{dt}=4t$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=4$, $\dfrac{dy}{dt}=5t^4+1$ y $\dfrac{d^2y}{dt^2}=20t^3$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{5t^4+1}{4t}$ y

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{(4t)(20t^3)-(5t^{54}+1)(4)}{(4t)^3}=\frac{80t^4-20t^4-4}{64t^3}=\frac{15t^4-1}{16t^3}.$$

Usando la fórmula alternativa tenemos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{d}{dt}\left[\frac{5t^4+1}{4t}\right]\frac{1}{4t}=\frac{(20t^3)(4t)-(5t^4+1)(4)}{(4t)^2}\frac{1}{4t}=\frac{15t^4-1}{16t^3}.$$

Ejercicios propuestos E

Determine las derivadas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1) $x = a\cos t, y = b\,\text{sen}\,t$ 2) $x = a(t - \text{sen}\,t), y = a(1 - \cos t)$ 3) $x = a\cos^3 t, y = b\,\text{sen}^3\, t$

4) $x = \frac{3at}{1+t^2}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ 5) $x = 2\ln(\text{cotg}\,t), y = \text{tg}\,t + \text{cotg}\,t$ 6) $x = 4\,\text{sen}\,t, y = 4\cos t$

7) $x = \cos t, y = \text{sen}\,t$ 8) $x = t^5 + 2t^3, y = 5t^3 - t$ 9) $x = 2\cos^2 t, y = 3\,\text{sen}^2\, t$

13. ***Derivada de orden superior.***

Si la función *f* es diferenciable en todo su dominio, entonces su derivada f' se le llama **primera derivada** de *f* o **primera función derivada**. Si la función f' es también diferenciable, entonces la derivada f'' se denomina **segunda derivada** de *f* o **segunda función derivada**… Si continuamos derivando *n* veces, entonces la derivada $f^{(n)}$ es llamada *n*- ésima derivada de *f*. La función *f* puede representarse como $f^{(0)}$.

A continuación conoceremos las distintas notaciones para las derivadas de orden superior:

Primera derivada: $y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[f(x)]$

Segunda derivada: $y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}[f(x)], \quad D_x^2[f(x)]$

Tercera derivada: $y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)], \quad D_x^3[f(x)]$

Cuarta derivada: $y^{(4)}, \quad f^{(4)}(x), \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \frac{d^4}{dx^4}[f(x)], \quad D_x^4[f(x)]$

$\vdots$

n-ésima derivada: $y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)], \quad D_x^n[f(x)].$

Para familiarizarnos con la derivación de orden superior, veamos con detenimiento el desarrollo de los siguientes ejemplos.

Ejercicios resueltos 8.

8.1) Las derivadas $f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x)$ y $f^{(5)}(x)$ de $f'(x) = 5x^7 + 2x^4 - 3x$ son:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[f'(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[5x^7+2x^4-3x\right]=35x^6+8x^3-3$$

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}\left[f''(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[35x^6+8x^3-3\right]=210x^5+24x^2$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{d}{dx}\left[f'''('x)\right]=\frac{d}{dx}\left[210x^5+24x^2\right]=1050x^4+48x$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{d}{dx}\left[f^{(4)}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[1050x^4+48x\right]=4200x^3+48.$$

8.2) Las derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ de $f(x)=\operatorname{sen}^6 x$ son:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^6 x\right]=6\operatorname{sen}^5 x\cos x$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[f'(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[6\operatorname{sen}^5 x\cos x\right]=30\operatorname{sen}^4 x\cos x-6\operatorname{sen}^6 x$$

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}\left[f''(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[30\operatorname{sen}^4 x\cos x-6\operatorname{sen}^6 x\right]=120\operatorname{sen}^3 x\cos x-66\operatorname{sen}^5 x$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{d}{dx}\left[f'''(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[120\operatorname{sen}^3 x\cos x-66\operatorname{sen}^5 x\right]=360\operatorname{sen}^2 x\cos x-450\operatorname{sen}^4 x.$$

14. Bibliografía

[1] Rabuffetti Hebe T. *Introducción al Análisis Matemático*, décima edición.

[2] Apostol Tom M. *Calculus*, segunda edición.

Trabajo enviado por: Eleazar José García
eleagarcia95@hotmail.com
Profesión: Licenciado en Matemática
País: Venezuela