MÓDULO 1

INTEGRALES INDEFINIDAS

Usted está familiarizado con algunas ***operaciones inversas***. La adición y la sustracción son operaciones inversas, la multiplicación y la división son también operaciones inversas, así como la potenciación y la extracción de raíces. Ahora, conocerá la operación inversa la de derivación o diferenciación denominada ***antiderivación*** o ***antidiferenciación***, la cual implica el cálculo de una ***antiderivada.***

Antiderivada.

Una función F se denomina **antiderivada** de una función f en un intervalo I si $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in I$.

Ejemplo.

Si F es la función definida por $F(x)=4x^3+x^2+5,$ entonces $F'(x)=12x^2+2x.$ De modo que si $f(x)=12x^2+2x,$ entonces f es la derivada de F, y F es la antiderivada de f. Si G es la función definida por $G(x)=4x^3+x^2-17,$ entonces G también es una antiderivada de f, porque $G'(x)=12x^2+2x.$ En realidad, cualquier función H definida por $H(x)=4x^3+x^2+C,$ donde C es una constante, es una antiderivada de f.

Teorema 1.

Si f y g son dos funciones definidas en el intervalo I, tales que $f'(x)=g'(x)$ para todo $x\in I,$ entonces existe una constante K tal que $f(x)=g(x)+K$ para todo $x\in I.$

*"La **antiderivación** o **antidiferenciación** es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo* $\int$ *denota la operación de antiderivación, y se escribe* $\int f(x)\,dx=F(x)+C,$ *donde* $F'(x)=f(x)$ y $d\left(F(x)\right)=f(x)\,dx$ *".*

En la igualdad $\int f(x)\,dx=F(x)+C,$ x es la variable de integración, $f(x)$ es el integrando y la expresión $F(x)+C$ recibe el nombre de **antiderivada general** o **integral indefinida** de f. Si $\{F(x)+C\}$ es el conjunto de todas las funciones cuyas diferenciales sean $f(x)\,dx,$ también es el conjunto de todas las funciones cuya derivada es $f(x)$.

Teorema 2.

$$\int dx=x+C.$$

Teorema 3.

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$$ donde a es una constante.

Teorema 4.

Si las funciones f y g están definidas en el mismo intervalo, entonces $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Teorema 5.

Si las funciones $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \ldots + c_n f_n(x)]\,dx$$

$$= c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + c_3\int f_3(x)\,dx + \ldots\ + c_n\int f_n(x)\,dx,$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son constantes.

Teorema 6.

Si n es un número racional, entonces $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1.$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \left(\mathbf{5}x^4 - \mathbf{8}x^3 + \mathbf{9}x^2 - \mathbf{2}x + \mathbf{7}\right)dx$

Solución.

$$\int \left(\mathbf{5}x^4 - \mathbf{8}x^3 + \mathbf{9}x^2 - \mathbf{2}x + \mathbf{7}\right)dx = \mathbf{5}\int x^4\,dx - \mathbf{8}\int x^3\,dx + \mathbf{9}\int x^2\,dx - \mathbf{2}\int x\,dx + \mathbf{7}\int dx$$

$$= \mathbf{5}\cdot\frac{x^5}{\mathbf{5}} - \mathbf{8}\cdot\frac{x^4}{\mathbf{4}} + \mathbf{9}\cdot\frac{x^3}{\mathbf{3}} - \mathbf{2}\cdot\frac{x^2}{\mathbf{2}} + \mathbf{7}x + C$$

$$= x^5 - \mathbf{2}x^4 + \mathbf{3}x^3 - x^2 + \mathbf{7}x + C$$

2) Calcule $\int \sqrt{x}\left(x + \dfrac{\mathbf{1}}{x}\right)dx$

Solución.

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)dx = \int x^{1/2}\left(x + x^{-1}\right)dx = \int \left(x^{3/2} + x^{-1/2}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \tfrac{2}{5}x^{5/2} + \mathbf{2}x^{1/2} + C$$

3) Determine $\int \dfrac{\mathbf{5}t^2 + \mathbf{7}}{t^{4/3}}\,dt$

Solución.

$$\int \frac{5t^2+7}{t^{4/3}}\,dt = 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\,dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\,dt = 5\int t^{2/3}\,dt + 7\int t^{-4/3}\,dt = 5\cdot\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}} + 7\cdot\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}} + C$$

$$= 3t^{5/3} - 21t^{-1/3} + C = 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C$$

Los teoremas para las integrales indefinidas de las funciones trigonométricas seno, coseno, secante al cuadrado, cosecante al cuadrado, secante por tangente y cosecante por cotangente, son deducciones inmediatas de los teoremas correspondientes de diferenciación. A continuación se presentan tales teoremas.

Teorema 7.

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

Teorema 8.

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

Teorema 9.

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

Teorema 10.

$$\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

Teorema 11.

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$$

Teorema 12.

$$\int \csc x \operatorname{cotg} x\,dx = -\csc x + C$$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \left(3\sec x\ \operatorname{tg} x - 5\csc^2 x + 8\operatorname{sen} x\right)dx$

Solución.

$$\int \left(3\sec x\operatorname{tg} x-5\csc^2 x+8\operatorname{sen} x\right)dx=3\int \sec x\operatorname{tg} x\,dx-5\int \csc^2 x\,dx+8\int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$=3\sec x-5\left(-\operatorname{cotg} x\right)+8\left(-\cos x\right)+C=3\sec x+5\operatorname{cotg} x-8\cos x+C$$

Las identidades trigonométricas se emplean con frecuencia cuando se calculan integrales indefinidas que involucran funciones trigonométricas. Las ocho identidades trigonométricas fundamentales siguientes son de crucial importancia.

$$\operatorname{sen} x\csc x=1 \qquad \cos x\sec x=1 \qquad \operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x=1 \qquad \operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \qquad \operatorname{tg}^2 x+1=\sec^2 x \qquad \operatorname{cotg}^2 x+1=\csc^2 x$$

2) Calcule $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{cotg} x-3\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}dx$

Solución.

$$\int \frac{2\operatorname{cotg} x-3\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}dx=2\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\operatorname{cotg} x\,dx-3\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}dx=2\int \csc x\operatorname{cotg} x\,dx-3\int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$=2\left(-\csc x\right)-3\left(-\cos x\right)+C=-2\csc x+3\cos x+C$$

3) Determine $\displaystyle\int \left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x+4\right)dx$

Solución.

$$\int \left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x+4\right)dx=\int \left[\left(\sec^2-1\right)+\left(\csc^2-1\right)+4\right]dx=\int \sec^2 x\,dx+\int \csc^2 x\,dx+2\int dx$$

$$=\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+2x+C$$

Ejercicios.

Calcule las integrales indefinidas:

1) $\displaystyle\int \left(3u^5-2u^3\right)du$ **2)** $\displaystyle\int \frac{2x^4}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ **3)** $\displaystyle\int y^3\left(2y^2-3\right)dx$ **4)** $\displaystyle\int \frac{y^4+2y^2-1}{\sqrt{y}}dx$

5) $\displaystyle\int \left(5\cos x-4\operatorname{sen} x\right)dx$ **6)** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$ **7)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$ **8)** $\displaystyle\int \left(4\csc x\cot x+2\sec^2 x\right)dx$

9) $\displaystyle\int \left(2\operatorname{cotg}^2 \theta-3\operatorname{tg}^2 \theta\right)d\theta$ **10)** $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{tg}\beta-4\cos^2\beta}{\cos\beta}d\beta$

Teorema 13. *Regla de la cadena para antiderivación.*

Sea g una función diferenciable y sea el contradominio de g algún intervalo I. Suponga que f es una función definida en I y que F es una antiderivada de f en I. Entonces $\int f(g(x))\left[g'(x)\right]dx = \int f(g(x))\,d(g(x)) = F(g(x)) + C.$

Teorema 14.

Si g es una función diferenciable y n es un número racional, entonces

$$\int \left[g(x)\right]^n \left[g'(x)\,dx\right] = \frac{\left[g(x)\right]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1.$$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \sqrt{\mathbf{3}x+\mathbf{4}}\,dx$

Solución.

$$\int \sqrt{\mathbf{3}x+\mathbf{4}}\,dx = \int (\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{1/2}\,dx$$

y observe que si $g(x) = \mathbf{3}x+\mathbf{4}$ entonces $g'(x)\,dx = \mathbf{3}\,dx.$ Por lo tanto, se necesita un factor **3** junto a dx para obtener $g'(x)\,dx = \mathbf{3}\,dx.$ En consecuencia, se escribe

$$\int (\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{1/2}\,dx = \int (\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{1/2}\cdot\mathbf{3}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\,dx\right) = \tfrac{1}{3}\int \underbrace{(\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{1/2}}_{(g(x))^n}\underbrace{(\mathbf{3}\,dx)}_{g'(x)dx} = \tfrac{1}{3}\int \underbrace{(\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{1/2}}_{(g(x))^n}\underbrace{d(\mathbf{3}x+\mathbf{4})}_{d(g(x))}$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\overbrace{(\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{\frac{1}{2}+1}}^{(g(x))^{n+1}}}{\underbrace{\tfrac{1}{2}+\mathbf{1}}_{n+1}} + C = \tfrac{2}{9}(\mathbf{3}x+\mathbf{4})^{3/2} + C$$

2) Calcule $\int x^2\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)^{\mathbf{8}}dx$

Solución.

Observe que si $g(x) = \mathbf{5}+\mathbf{2}x^3$ entonces $g'(x)\,dx = \mathbf{6}x^2\,dx.$ Por lo tanto, necesitamos un factor **6** junto a $x^2\,dx$ para obtener $g'(x)\,dx = \mathbf{6}x^2\,dx.$ Luego, se escribe

$$\int x^2\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)^{\mathbf{8}}dx = \tfrac{1}{6}\int \overbrace{\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)^{\mathbf{8}}}^{(g(x))^n}\overbrace{\left(\mathbf{6}x^2\,dx\right)}^{g'(x)dx} = \tfrac{1}{6}\int \overbrace{\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)^{\mathbf{8}}}^{(g(x))^n}\overbrace{d\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)}^{d(g(x))} = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\overbrace{\left(\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)^{\mathbf{8}+\mathbf{1}}\right)}^{(g(x))^{n+1}}}{\underbrace{\mathbf{8}+\mathbf{1}}_{n+1}} + C$$

$$= \tfrac{1}{54}\left(\mathbf{5}+\mathbf{2}x^3\right)^{\mathbf{9}} + C$$

3) Evalúe $\int \dfrac{\mathbf{4}x^2}{\left(\mathbf{1}-\mathbf{8}x^3\right)^{\mathbf{4}}}\,dx$

Solución.

Como $d\left(1-8x^3\right)=-24x^2\,dx,$ se escribe

$$\int \frac{4x^2}{\left(1-8x^3\right)^4}dx=4\int \left(1-8x^3\right)^{-4}\left(x^2\,dx\right)=4\left(-\tfrac{1}{24}\right)\int \left(1-8x^3\right)^{-4}\left(-24x^2\,dx\right)$$

$$=-\tfrac{1}{6}\int \underbrace{\left(1-8x^3\right)^{-4}}_{(g(x))^n}\underbrace{d\left(1-8x^3\right)}_{d(g(x))}=-\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\left(1-8x^3\right)^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{18\left(1-8x^3\right)^3}+C$$

Ejercicios.

Resuelva:

1) $\int \sqrt{1-4y}\,dy$ 2) $\int \sqrt[3]{3x-4}\,dx$ 3) $\int x\sqrt[3]{x^2-9}\,dx$ 4) $\int x\left(2x^2+1\right)^6\,dx$

5) $\int x^2\left(x^3-1\right)^{10}\,dx$ 6) $\int \frac{y^3}{\left(1-2y^4\right)^5}dy$ 7) $\int y\csc 3y^2\cot 3y^2\,dy$ 8) $\int \cos x\left(2+\operatorname{sen} x\right)^5\,dx$

En los teoremas que se presentan a continuación u es una función de x, es decir, $u=f(x)$.

Teorema 15.

$$\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

Solución.

En este caso $u=x^3+1,$ por lo tanto, $du=3x^2\,dx,$ luego se necesita un factor 3 junto a $x^2\,dx$ para obtener $du.$ Entonces, se escribe

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx=\tfrac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx=\tfrac{1}{3}\int \frac{1}{\underbrace{x^3+1}_{u}}\underbrace{d\left(x^3+1\right)}_{du}=\tfrac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C$$

Teorema 16.

$$\int \operatorname{tg} u\,du=\ln|\sec u|+C$$

Ejemplo.

Calcule $\int x^5\operatorname{tg} x^6\,dx$

Solución.

Consideremos $u=x^6$, tenemos que $du=6x^5\,dx$, luego necesitamos un factor 6 junto a $x^5\,dx$ para obtener du. Por lo tanto,

$$\int x^5 \operatorname{tg} x^6\,dx=\tfrac{1}{6}\int \operatorname{tg} x^6\left(6x^5\,dx\right)=\tfrac{1}{6}\int \operatorname{tg}\underbrace{x^6}_{u}\,\underbrace{d\left(x^6\right)}_{du}=\tfrac{1}{6}\ln\left|\sec x^6\right|+C$$

Teorema 17.

$$\int \operatorname{cotg} u\,du=\ln\left|\operatorname{sen} u\right|+C$$

Ejemplo.

Calcule $\int \operatorname{cotg}(7x+3)\,dx$

Solución.

Como $u=7x+3$, entonces $du=7\,dx$, por lo tanto,

$$\int \operatorname{cotg}(7x+3)\,dx=\tfrac{1}{7}\int \operatorname{cotg}(7x+3)(7dx)=\tfrac{1}{7}\int \operatorname{cotg}\underbrace{(7x+3)}_{u}\,\underbrace{d\,(7x+3)}_{du}=\tfrac{1}{7}\ln\left|\operatorname{sen}(7x+3)\right|+C$$

Teorema 18.

$$\int \sec u\,du=\ln\left|\sec u+\operatorname{tg} u\right|+C$$

Ejemplo.

Evalúe $\int 5x\sec x^2\,dx$

Solución.

Siendo $u=x^2$, entonces $du=2x\,dx$, luego, podemos escribir

$$\int 5x\sec x^2\,dx=\tfrac{5}{2}\int \sec x^2\left(2x\,dx\right)=\tfrac{5}{2}\int \sec x^2\,d\left(x^2\right)=\tfrac{5}{2}\ln\left|\sec x^2+\operatorname{tg} x^2\right|+C$$

Teorema 19.

$$\int \csc u\,du=\ln\left|\csc u-\operatorname{cotg} u\right|+C$$

Ejemplo.

Resuelva $\int \frac{1}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$

Solución.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} 2x}\,dx = \int \csc 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int \csc 2x(2dx) = \tfrac{1}{2}\int \csc 2x\,d(2x) = \tfrac{1}{2}\ln\left|\csc 2x - \operatorname{cotg} 2x\right| + C$$

Ejercicios.

Resuelva las integrales indefinidas:

1) $\int \frac{1}{3-2x}\,dx$ 2) $\int \frac{x}{2-x^2}\,dx$ 3) $\int \frac{3x^2}{5x^3-1}\,dx$ 4) $\int \frac{2x-1}{x(x-1)}\,dx$ 5) $\int \frac{1}{y\ln y}\,dy$

6) $\int \frac{\operatorname{sen} 3t}{\cos 3t - 1}\,dt$ 7) $\int (\operatorname{cotg} 5x + \csc 5x)\,dx$ 8) $\int \frac{\cos 3x + 3}{\operatorname{sen} 3x}\,dx$ 9) $\int \frac{2 - 3\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\,dx$

10) $\int (\operatorname{tg} 2x - \sec 2x)\,dx$ 11) $\int \frac{2x^3}{x^2-4}\,dx$ 12) $\int \frac{5-4y^2}{3+2y}\,dy$ 13) $\int \frac{\ln^2 3x}{x}\,dx$

14) $\int \frac{(2+\ln^2 x)}{x(1-\ln x)}\,dx$ 15) $\int \frac{2\ln x + 1}{x\left[\ln^2 x + \ln x\right]}\,dx$ 16) $\int \frac{3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3+1}\,dx$

17) $\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}\,dx$ 18) $\int \frac{\operatorname{cotg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ 19) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 20) $\int \frac{\ln^7 x}{x}\,dx$

Teorema 20.

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Solución.

Sea $u = \sqrt{x}$, entonces, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, por lo tanto

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \overbrace{e^{\sqrt{x}}}^{e^u}\underbrace{\left(\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)}_{du} = 2\int e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

Teorema 21.

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \sqrt{10^{3x}}\,dx$

Solución.

Como $\sqrt{10^{3x}} = 10^{3x/2}$, se aplica el teorema 21 con $u = \frac{3x}{2}$, de donde obtenemos, $du = \frac{3}{2}dx$, entonces

$$\int \sqrt{10^{3x}}\,dx = \int 10^{3x/2}\,dx = \tfrac{2}{3}\int 10^{3x/2}\left(\tfrac{3}{2}\,dx\right) = \tfrac{2}{3}\int 10^{u}\,du = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{10^{u}}{\ln 10}+C = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{10^{3x/2}}{\ln 10}+C = \frac{2\sqrt{10^{3x}}}{3\ln 10}+C$$

Ejercicios.

En los siguientes ejercicios evalúe la integral indefinida.

1) $\int e^{2-5x}dx$ **2)** $\int e^{2x+1}dx$ **3)** $\int \frac{1+e^{2x}}{e^{x}}dx$ **4)** $\int \frac{e^{3x}}{\left(1-2e^{3x}\right)^{2}}dx$ **5)** $\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}dx$

6) $\int a^{z\ln z}\left(\ln z+1\right)dz$ **7)** $\int e^{y}2^{e^{y}}3^{e^{y}}dy$ **8)** $\int 4^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x}$ **9)** $\int \frac{\left(\log_{3}x\right)^{2}}{x}dx$

A partir de las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se obtienen algunas fórmulas de integrales indefinidas. El teorema siguiente proporciona tres de estas fórmulas.

Teorema 22.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}} = \operatorname{arcsen} u + C$$

$$\int \frac{du}{1+u^{2}} = \operatorname{arctg} u + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^{2}-1}} = \operatorname{arc\,sec} u + C$$

El teorema siguiente proporciona algunas fórmulas más generales.

Teorema 23.

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^{2}+u^{2}} = \tfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^{2}-a^{2}}} = \tfrac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{a} + C$$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^{2}}}$

Solución.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^{2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^{2}-\left(3x\right)^{2}}} = \tfrac{1}{3}\int \frac{3dx}{\sqrt{2^{2}-\left(3x\right)^{2}}} = \tfrac{1}{3}\int \frac{d\left(3x\right)}{\sqrt{2^{2}-\left(3x\right)^{2}}} = \tfrac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+C$$

2) Evalúe $\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}$

Solución.

$$\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}=\int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)+5}$$

Con la finalidad de completar el cuadrado de $x^2-\frac{2}{3}x$ se suma $\frac{1}{9}$, y como está multiplicado por 3 en realidad se suma es $\frac{1}{3}$ al denominador, de modo que para que la expresión del denominador persista, es decir, no se altere, se resta también $\frac{1}{3}$. Por lo tanto, se tiene

$$\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}=\int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+5-\frac{1}{3}}=\int \frac{dx}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{14}}{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{14}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\frac{3x-1}{\sqrt{14}}+C$$

3) Evalúe $\int \frac{6dx}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Solución.

$$\int \frac{6dx}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}}=\int \frac{6dx}{-(x-2)\sqrt{\left(x^2-4x+4\right)-1}}=-6\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}}$$

$$=-6\operatorname{arcsec}(x-2)+C$$

Las fórmulas de integración indefinida del teorema siguientes son consecuencia inmediata de las fórmulas de las derivadas de las funciones hiperbólicas.

Teorema 24.

$$\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du=-\operatorname{sech} u+C$$

$$\int \operatorname{csch} u \operatorname{cotgh} u\, du=-\operatorname{csch} u+C$$

$$\int \operatorname{senh} u\, du=\cosh u+C$$

$$\int \cosh u\, du=\operatorname{senh} u+C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\operatorname{cotgh} u + C$$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x\, dx$

Solución.

$$\int \cosh^2 x (\operatorname{senh} x\, dx) = \int \cosh^2 x\, d(\cosh x) = \tfrac{1}{3}\cosh^3 x + C$$

2) Evalúe $\int \operatorname{tgh}^2 x\, dx = \int \left(1 - \operatorname{sech}^2 x\right) dx = \int dx - \int \operatorname{sech}^2 x\, dx = x - \operatorname{tgh} x + C$

Ejercicios.

1) $\int \operatorname{senh}^4 x \cosh x\, dx$ **2**) $\int x \cosh x^2 \operatorname{senh} x^2\, dx$ **3**) $\int x^2 \operatorname{csch}^2 x^3\, dx$

4) $\int \operatorname{cotgh}^2 3x\, dx$ **5**) $\int \operatorname{tgh} 2x \ln(\cosh 2x)\, dx$ **6**) $\int \operatorname{sech}^2 x \operatorname{tgh}^2 x\, dx$

Antes de estudiar los diferentes métodos de integración, se presenta una lista numerada de las fórmulas típicas de integración indefinida las cuales deben ser memorizadas por el estudiante para un mejor desenvolvimiento.

1. $\displaystyle\int du = u + C$

2. $\displaystyle\int a\,du = au + C \qquad a \in \mathbb{R}$

3. $\displaystyle\int \left[f(u) + g(u) \right] du = \int f(u)\,du + \int g(u)\,du$

4. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq 1$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad donde \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1$

7. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

9. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$

11. $\int \csc^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$

12. $\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$

13. $\int \csc u \operatorname{cotg} u\, du = -\csc u + C$

14. $\int \operatorname{tg} u\, du = \ln|\sec u| + C$

15. $\int \operatorname{cotg} u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

16. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

17. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \operatorname{cotg} u| + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C \qquad donde \quad a > \mathbf{0}$

19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C \qquad donde \quad a > \mathbf{0}$

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{a} + C \qquad donde \quad a > \mathbf{0}$

21. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

22. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

23. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tgh} u + C$

24. $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

25. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

26. $\int \operatorname{csch} u \operatorname{cotgh} u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Emprendamos el estudio de los métodos de integración. Uno de los métodos más ampliamente usados en la resolución de integrales es la ***integración por partes.***

INTEGRACIÓN POR PARTES.

La fórmula de la integración por partes es la siguiente:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta fórmula expresa a la integral $\int u\,dv$ en términos de la integral $\int v\,du$. Mediante una elección adecuada de u y dv, puede evaluarse más fácilmente integral $\int v\,du$.

Ejemplos.

1) Evaluar $\int x\ln x\,dx$

Solución.

Tomemos $u = \ln x$ y $dv = x\,dx$, por lo tanto, $du = \dfrac{dx}{x}$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$, luego,

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C$$

2) Evaluar $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

Solución.

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int x^2 e^{x^2}(2x\,dx) = \tfrac{1}{2}\int x^2 e^{x^2}\,d\left(x^2\right)$$

Sea $u = x^2$ y $dv = e^{x^2}d\left(x^2\right)$, entonces, $du = 2x\,dx$ y $v = e^{x^2}$, por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2}\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2}(2x\,dx)\right) = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}\int e^{x^2}\,d\left(x^2\right) = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejercicios.

Evalúe las integrales indefinidas.

1) $\displaystyle\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,dt$ **2**) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$ **3**) $\displaystyle\int x\sec x\operatorname{tg} x\,dx$ **4**) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln y)\,dy$ **6**) $\displaystyle\int \operatorname{sen} z\,\ln(\cos z)\,dz$ **7**) $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}\,dx$ **8**) $\displaystyle\int x\,3^x\,dx$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS.

Las **integrales trigonométricas** implican operaciones algebraicas sobre funciones trigonométricas.

CASO 1.

(i) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ o **(ii)** $\int \cos^n dx$, donde n es un número entero positivo impar.

(i) Se hace la transformación

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^n x\,dx &= \left(\operatorname{sen}^{n-1} x\right)\left(\operatorname{sen} x\,dx\right)\\ &= \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\operatorname{sen} x\,dx\right)\\ &= \left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\operatorname{sen} x\,dx\right)\end{aligned}$$

(ii) Se hace la transformación

$$\begin{aligned}\cos x^n\,dx &= \left(\cos^{n-1} x\right)\left(\cos x\,dx\right)\\ &= \left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos x\,dx\right)\\ &= \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos x\,dx\right)\end{aligned}$$

Ejemplos.

1) Calcule $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

Solución.

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = \int\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x\,dx = \int\left(1-\cos^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x\,dx = \int\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\begin{aligned}&= \int \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \cos^2 x\ \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos^4 x\ \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\cos x + 2\int \cos^2 x\,d\left(\cos x\right) - \int \cos^4 x\,d\left(\cos x\right)\\ &= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

2) Calcule $\int \cos^3 x\,dx$

Solución.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\left(\cos x\,dx\right) = \int\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\left(\cos x\,dx\right) = \int \cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 x\ \cos x\,dx$$

$$= \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen}^2 x\,d\left(\operatorname{sen} x\right) = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

CASO 2.

$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx,$ donde al menos uno de los exponentes es un número entero positivo impar. En la solución de este caso se utiliza un método semejante al empleado en el caso 1.

(**i**) Si n es impar, entonces

$$\operatorname{sen}^n x \cos x\, dx = \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x (\operatorname{sen} x\, dx)$$
$$= (\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x (\operatorname{sen} x\, dx)$$
$$= (1 - \cos^2)^{\frac{n-1}{2}} \cos x (\operatorname{sen} x\, dx)$$

(**ii**) Si m es impar, entonces

$$\operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx = \operatorname{sen}^n x \cos^{m-1} x (\cos x\, dx)$$
$$= \operatorname{sen}^n x (\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\cos x\, dx)$$
$$= \operatorname{sen}^n x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\cos x\, dx)$$

Ejemplo.

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x (\operatorname{sen} x\, dx) = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x\, d(\cos x)$$
$$= -\int \cos^4 x\, d(\cos x) + \int \cos^6 x\, d(\cos x) = -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Cuando ninguno de los exponentes de las potencias seno y coseno es impar, no se pueden seguir los procedimientos expuestos en los casos 1 y 2. En tal caso se deben tomar muy en cuenta las identidades siguientes:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

CASO 3.

(i) $\int \operatorname{sen}^n x\, dx,$ **(ii)** $\int \cos^n x\, dx$ o **(iii)** $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx,$ donde m y n son números enteros positivos pares.

(**i**) Se hace la transformación

$$\operatorname{sen}^n x\, dx = (\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{n}{2}} dx$$
$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

(**ii**) Se hace la transformación

$$\cos^n x\,dx = \left(\cos^2 x\right)^{\frac{n}{2}} dx$$
$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

(**iii**) Se hace la transformación

$$\operatorname{sen}^n x\,\cos^m x\,dx = \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{n}{2}}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{m}{2}} dx$$
$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{m}{2}} dx$$

Ejemplos.

1) $$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \tfrac{1}{2}\int dx - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x)$$
$$= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

2) $$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \tfrac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) + \tfrac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\int dx + \tfrac{1}{8}\int \cos 4x\,dx = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{32}\int \cos 4x\,d(4x)$$
$$= \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$

CASO 4.

(i) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ o **(ii)** $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx,$ donde n es un número entero positivo.

(**i**) Se hace la transformación

$$\operatorname{tg}^n x\,dx = \operatorname{tg}^{n-2} x\,\operatorname{tg}^2 x\,dx$$
$$= \operatorname{tg}^{n-2} x\left(\sec^2 x - 1\right)$$

(**ii**) Se hace la transformación

$$\operatorname{cotg}^n x\,dx = \operatorname{cotg}^{n-2} x\,\operatorname{cotg}^2 x\,dx$$
$$= \operatorname{cotg}^{n-2} x\left(\csc^2 x - 1\right)$$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

Solución.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\left(\sec^2 x - \mathbf{1}\right)dx = \int \operatorname{tg} x\ \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg} x\,dx$$

$$= \int \operatorname{tg} x\,d\left(\operatorname{tg} x\right) - \int \operatorname{tg} x\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\left|\sec x\right| + C$$

2) Evalúe $\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx$

Solución.

$$\int \operatorname{cotg}^4 \mathbf{3}x\ dx = \int \operatorname{cotg}^2 \mathbf{3}x\ \cot^2 \mathbf{3}x\ dx = \int \operatorname{cotg}^2 \mathbf{3}x\ \left(\csc^2 \mathbf{3}x - \mathbf{1}\right)dx$$

$$= \int \operatorname{cotg}^2 \mathbf{3}x\ \csc^2 \mathbf{3}x\,dx - \int \operatorname{cotg}^2 \mathbf{3}x\ dx = \tfrac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^2 \mathbf{3}x\,d\left(\operatorname{cotg} \mathbf{3}x\right) - \int \left(\csc^2 \mathbf{3}x - \mathbf{1}\right)dx$$

$$= \tfrac{1}{9}\cot^3 \mathbf{3}x - \tfrac{1}{3}\int \csc^2 \mathbf{3}x\,d\left(\mathbf{3}x\right) + \int dx = \tfrac{1}{9}\cot^3 \mathbf{3}x - \tfrac{1}{3}\cot \mathbf{3}x + x + C$$

CASO 5.

(i) $\int \sec^n x\,dx$ o **(ii)** $\int \csc^n x\,dx$, donde n es un número entero positivo par.

(**i**) Se hace la transformación

$$\sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x\ \left(\sec^2 x\,dx\right)$$

$$= \left(\sec^2 x\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\sec^2 x\,dx\right)$$

$$= \left(\operatorname{tg}^2 x + \mathbf{1}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\sec^2 x\,dx\right)$$

(**ii**) Se hace la transformación

$$\csc^n x\,dx = \csc^{n-2} x\ \left(\csc^2 x\,dx\right)$$

$$= \left(\csc^2 x\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\csc^2 x\,dx\right)$$

$$= \left(\operatorname{cotg}^2 x + \mathbf{1}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\csc^2 x\,dx\right)$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \csc^6 x\,dx$

Solución.

$$\int \csc^6 x\,dx = \int \csc^4 x\left(\csc^2 x\,dx\right) = \int \left(\cot g^2 x + \mathbf{1}\right)^2 \left(\sec^2 x\,dx\right) =$$

$$= -\int \left(\cot g^4 x + \mathbf{2}\cot g^2 x + \mathbf{1}\right) d\left(\cot g\, x\right)$$

$$= -\int \cot g^4 x\, d\left(\cot g\, x\right) - \mathbf{2}\int \cot g^2 x\, d\left(\cot g\, x\right) - \int d\left(\cot g\, x\right)$$

$$= -\tfrac{1}{5}\cot g^5 x - \tfrac{2}{3}\cot g^3 x - \cot g\, x + C$$

CASO 6.

(i) $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m dx$ o **(ii)** $\int \cot g^n x \csc^m x\ dx,$ donde m es un entero positivo par.

(**i**) Se hace la transformación

$$\operatorname{tg}^n x \sec^m x\ dx = \operatorname{tg}^n x \sec^{n-2} x\left(\sec^2 x\ dx\right)$$

$$= \operatorname{tg}^n x\left(\sec^2 x\right)^{\frac{m-2}{2}}\left(\sec^2 x\ dx\right)$$

$$= \operatorname{tg}^n x\left(\operatorname{tg}^2 x + \mathbf{1}\right)^{\frac{m-2}{2}}\left(\sec^2 x\ dx\right)$$

(**ii**) Se hace la transformación

$$\cot g^n x \csc^m x\ dx = \cot g^n x \csc^{n-2} x\left(\csc^2 x\ dx\right)$$

$$= \cot g^n x\left(\csc^2 x\right)^{\frac{m-2}{2}}\left(\csc^2 x\ dx\right)$$

$$= \cot g^n x\left(\cot g^2 x + \mathbf{1}\right)^{\frac{m-2}{2}}\left(\csc^2 x\ dx\right)$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\ dx$

Solución.

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\ dx = \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x\left(\sec^2 x\ dx\right) = \int \operatorname{tg}^5 x\left(\operatorname{tg}^2 x + \mathbf{1}\right) d\left(\operatorname{tg} x\right)$$

$$= \int \operatorname{tg}^7 x\ d\left(\operatorname{tg} x\right) + \int \operatorname{tg}^5 x\ d\left(\operatorname{tg} x\right) = \tfrac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + \tfrac{1}{6}\operatorname{tg}^5 x + C$$

CASO 7.

(i) $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m dx$ o **(ii)** $\int \operatorname{cotg}^n x \csc^m x\ dx$, donde m es un entero positivo impar.

i) Se hace la transformación

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^n x \sec^m x\ dx &= \operatorname{tg}^{n-1} x \sec^{n-1} x\ (\sec x\ \operatorname{tg} x\, dx)\\ &= \left(\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \sec^{m-1} x\left(\sec x\ \operatorname{tg} x\ dx\right)\\ &= \left(\sec^2 x - 1\right)^{\frac{n-1}{2}} \sec^{m-1}\left(\sec x\ \operatorname{tg} x\, dx\right)\end{aligned}$$

(ii) Se hace la transformación

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}^n x \csc^m x\ dx &= \operatorname{cotg}^{n-1} x \csc^{m-1} x\ (\csc x\ \operatorname{cotg} x\ dx)\\ &= \left(\operatorname{cotg}^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \csc^{m-1} x\left(\csc x\ \operatorname{cotg} x\ dx\right)\\ &= \left(\csc^2 x - 1\right)^{\frac{n-1}{2}} \csc^{m-1}\left(\csc x\ \operatorname{cotg} x\ dx\right)\end{aligned}$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 dx$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x \sec^7 dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\left(\sec x\ \operatorname{tg} x\ dx\right) = \int \left(\operatorname{tg}^2 x\right)^2 \sec^6 x\left(\sec x\ \operatorname{tg} x\ dx\right)\\ &= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \sec^6 x\ d\left(\sec x\right) = \int \left(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1\right)\sec^6 x\ d\left(\sec x\right)\\ &= \int \sec^{10} x\ d\left(\sec x\right) - 2\int \sec^8 x\ d\left(\sec x\right) + \int \sec^6 x\ d\left(\sec x\right)\\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C\end{aligned}$$

CASO 8.

(i) $\int \sec^n x\, dx$ o **(ii)** $\int \csc^n x\, dx$, donde n es un número entero positivo impar.

Aplique integración por partes.

(i) Considere $u = \sec^{n-2} x$ y $dv = \sec^2 x\ dx$
(ii) Considere $u = \csc^{n-2} x$ y $dv = \csc^2 x\ dx$

Ejemplo.

Evalúe $\int \sec^5 x\,dx$

Solución.

Sean $\begin{cases} u=\sec^3 x & \Rightarrow \quad du=\mathbf{3}\sec^2 x\,(\sec x \operatorname{tg} x\,dx)=\mathbf{3}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x\ dx \\ dv=\sec^2 x\ dx & \Rightarrow \quad v=\operatorname{tg} x \end{cases}$

Aplicando el método de integración por partes tenemos:

$$\int \sec^5 x\,dx=\sec^3 x\ \operatorname{tg} x-\mathbf{3}\int \sec^3 x\ \operatorname{tg}^2 x\ dx=\sec^3 x\ \operatorname{tg} x-\mathbf{3}\int \sec^3 x\left(\sec^2 x-\mathbf{1}\right)dx$$

$$=\sec^3 x\ \operatorname{tg} x-\mathbf{3}\int \sec^5 x\,dx+\mathbf{3}\int \sec^3 x\,dx$$

Luego, $\int \sec^5 x\,dx=\frac{1}{4}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x+\frac{3}{4}\underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{I}$

Evaluemos la integral I aplicando el método de integración por partes:

Sean $\begin{cases} \bar{u}=\sec x & \Rightarrow \quad d\bar{u}=\sec x\ \operatorname{tg} x\ dx \\ d\bar{v}=\sec^2 x\ dx & \Rightarrow \quad \bar{v}=\operatorname{tg} x \end{cases}$

Entonces,

$$\int \sec^3 x\,dx=\sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec x\ \operatorname{tg}^2 x\ dx\ =\sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec x\left(\sec^2 x-\mathbf{1}\right)dx$$

$$=\sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec^3 x\,dx+\int \sec x\,dx=\sec x\ \operatorname{tg} x-\int \sec^3 x\,dx+\ln\left|\sec x+\operatorname{tg} x\right|+C$$

Por lo tanto,

$$\int \sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\ \tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

En conclusión,

$$\int \sec^5 x\,dx=\frac{1}{4}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sec x\ \operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\operatorname{tg} x\right|+C\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sec^3 x\ \operatorname{tg} x+\frac{3}{8}\sec x\ \operatorname{tg} x+\frac{3}{8}\ln\left|\sec x+\operatorname{tg} x\right|+C$$

CASO 9.

(i) $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m dx$ o **(ii)** $\int \operatorname{cotg}^n x \csc^m x\, dx$, donde n es un entero positivo par y m es un entero positivo impar.

Exprese el integrando en términos de potencias impares de la secante o cosecante y después siga las sugerencias del caso 8.

(i) Se hace la transformación

$$\operatorname{tg}^n x \sec^m x\, dx = \left(\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{n}{2}} \sec^m x\, dx$$
$$= \left(\sec^2 x - \mathbf{1}\right)^{\frac{n}{2}} \sec^m x\, dx$$

(ii) Se hace la transformación

$$\operatorname{cotg}^n x \csc^m x\, dx = \left(\operatorname{cotg}^2\right)^{\frac{n}{2}} \csc^m x\, dx$$
$$= \left(\csc^2 x - \mathbf{1}\right)^{\frac{n}{2}} \csc^m x\, dx$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 dx$

Solución.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 dx = \int \left(\sec^2 x - \mathbf{1}\right)\sec^3 x\, dx = \underbrace{\int \sec^5 x\, dx}_{A} - \underbrace{\int \sec^3 x\, dx}_{B}$$

Las integrales A y B las resolvimos en el ejemplo del caso 8.

La solución de A es: $\int \sec^5 x\, dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8}\ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + C_1$

La solución de B es: $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + C_2$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{7}{8}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{7}{8}\ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right| + C, \quad C = C_1 + C_2$$

CASO 10.

(i) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, **(i)** $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$ o **(iii)** $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$, $m \neq n$.

(i) Se hace la transformación

$$\cos mx\,\cos nx\,dx=\tfrac{1}{2}\left[\cos(m+n)x\;+\;\cos(m-n)x\right]dx$$

(ii) Se hace la transformación

$$\operatorname{sen} mx\,\cos nx\,dx=\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x\;+\;\operatorname{sen}(m-n)x\right]dx$$

(iii) Se hace la transformación

$$\operatorname{sen} mx\,\operatorname{sen} nx\,dx=\tfrac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x\;+\;\cos(m-n)x\right]dx$$

Ejemplo.

Evalúe $\int \operatorname{sen} \mathbf{3}x\,\cos \mathbf{2}x\,dx$

Solución.

$$\int \operatorname{sen} \mathbf{3}x\,\cos \mathbf{2}x\,dx=\int \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} \mathbf{5}x+\operatorname{sen} x)\,dx=\tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} \mathbf{5}x\,dx+\tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$=\tfrac{1}{10}\int \operatorname{sen} \mathbf{5}x\,d(\mathbf{5}x)+\tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx=-\tfrac{1}{10}\cos \mathbf{5}x-\tfrac{1}{2}\cos x+C$$

Ejercicios.

Determine las integrales indefinidas indicadas a continuación.

1) $\int \operatorname{sen} \mathbf{3}x\,\cos \mathbf{5}x\,dx$ **2)** $\int \operatorname{sen}^4 x\,\cos x\,dx$ **3)** $\int \cos^3 \mathbf{4}x\,\operatorname{sen} \mathbf{4}x\,dx$

4) $\int \cos^6 \tfrac{1}{2}x\,\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\,dx$ **5)** $\int \sqrt{\cos z}\,\operatorname{sen}^3 z\,dz$ **6)** $\int \operatorname{sen}^2 \mathbf{3}x\,dx$

7) $\int \dfrac{\cos^3 \mathbf{5}x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} \mathbf{5}x}}\,dx$ **8)** $\int \cos \mathbf{4}y\,\cos \mathbf{8}y\,dy$ **9)** $\int \operatorname{sen} \mathbf{12}t\,\operatorname{sen} \mathbf{4}t\,dt$

10) $\int \cot^2 \mathbf{3}x\,\csc^4 \mathbf{3}x\,dx$ **11)** $\int \dfrac{\sec^4(\ln x)}{x}\,dx$ **12)** $\int e^x\,\operatorname{tg}^4(e^x)\,dx$

13) $\int (\operatorname{tg} \mathbf{2}x+\operatorname{cotg} \mathbf{2}x)^2\,dx$ **14)** $\int \csc^3 x\,dx$ **15)** $\int \dfrac{\mathbf{2}\operatorname{sen} w-\mathbf{1}}{\cos^2 w}\,dw$

INTEGRACIN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Se mostrará con tres casos cómo el cambio de variable mediante sustitución trigonométrica permite con frecuencia evaluar una integral que contiene una expresión de una de las formas siguientes donde $a > 0$:

$$\sqrt{a^2-b^2x^2}\qquad\qquad \sqrt{a^2+b^2x^2}\qquad\qquad \sqrt{b^2x^2-a^2}$$

CASO 1.

El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, donde $a > 0$.

Se introduce una nueva variable θ considerando $x = \frac{a}{b}\operatorname{sen}\theta$, donde

$0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ si $x \ge 0$ y $-\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0$ si $x < 0$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \sqrt{16 - x^2}\,dx$

Solución.

Sabemos que: $\int \sqrt{16 - x^2}\,dx = \int \sqrt{4^2 - x^2}\,dx$

Hagamos el cambio $x = 4\operatorname{sen}\theta$ y diferenciemos el primer miembro con respecto de x y al segundo miembro con respecto de θ, entonces, $dx = 4\cos\theta\,d\theta$. Sustituyendo obtenemos:

$$\int \sqrt{16 - x^2}\,dx = \int \sqrt{16 - (4\operatorname{sen}\theta)^2}\,(4\cos\theta\,d\theta) = \int \sqrt{16 - 16\operatorname{sen}^2\theta}\,(4\cos\theta\,d\theta)$$

$$= \int 4\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}\,(4\cos\theta\,d\theta) = 16\int \cos^2\theta\,d\theta = 16\int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

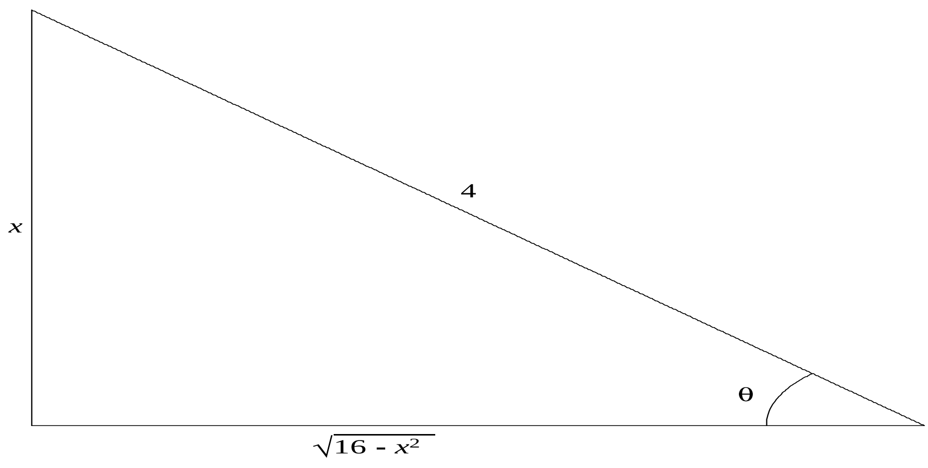
$$= 8\int d\theta + 4\int \cos 2\theta\,d(2\theta) = 8\theta + 4\operatorname{sen} 2\theta + C$$

Ahora, como $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{x}{4}$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$, entonces,

$$\int \sqrt{16 - x^2}\,dx = 8\operatorname{arcsen}\frac{x}{4} + \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$$

Otra manera de resolver.

Observemos la siguiente figura:



Es evidente por trigonometría que: $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = 4\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{4}$, luego, despejando x se obtiene: $x = 4\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = 4\cos\theta\, d\theta.$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \int (4\cos\theta)(4\cos\theta\, d\theta) = 16\int \cos^2\theta\, d\theta = 16\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 8\int d\theta + 4\int \cos 2\theta\, d(2\theta) = 8\theta + 4\operatorname{sen} 2\theta + C$$

Como hemos indicado anteriormente,

$\theta = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{4}$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta = \dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$, entonces

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx = 8\operatorname{arcsen}\frac{x}{4} + \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C$$

2) Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}}$

Solución.

Como $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{5^2-(2x)^2}}$, haciendo el cambio $x = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$ tenemos: $dx = \frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta.$ Por lo tanto,

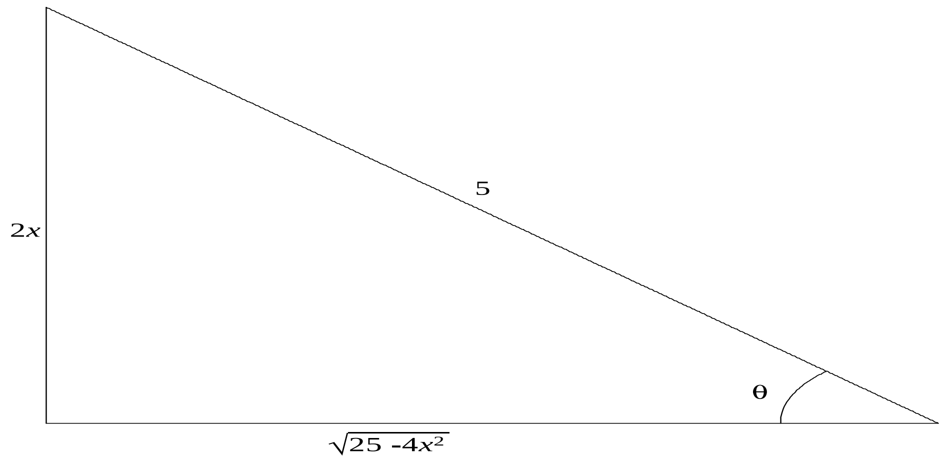
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \int \frac{\frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta}{\frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta\sqrt{25-4\left(\frac{25}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{5\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{1}{5}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \csc\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln\left|\csc\theta - \operatorname{cotg}\theta\right| + C$$

Pero, $\csc\theta = \dfrac{5}{2x}$ y $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}$, en conclusión.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5}{2x} - \frac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}\right| + C$$

Resolvamos teniendo en cuenta la figura siguiente:



Obviamente, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2x}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta,$ y

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{25-4x^2}}{5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25-4x^2} = 5\cos\theta.$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \int \frac{\frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta}{\frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta \cdot 5\cos\theta} = \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{5}\int \csc\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln\left|\csc\theta - \operatorname{cotg}\theta\right| + C$$

A partir de la figura se tiene: $\csc\theta = \dfrac{5}{2x}$ y $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}$, entonces,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5}{2x} - \frac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}\right| + C$$

CASO 2.

El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, donde $a > 0$.

Introduzca una variable θ considerando $x = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\theta$, donde

$0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ si $x \ge 0$ y $-\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0$ si $x < 0$

Ejemplo.

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+6}}$

Solución.

$\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+6}} = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}}$, haciendo el cambio: $x = \sqrt{6}\operatorname{tg}\theta$, obtenemos,

$dx = \sqrt{6}\sec^2\theta\, d\theta$ y $\sqrt{x^2+6} = \sqrt{6}\sec\theta$. Sustituyendo nos queda:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+6}} = \int \frac{\left(\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\theta\right)^2\left(\sqrt{6}\sec^2\theta d\theta\right)}{\sqrt{6}\sec\theta} = \int \frac{6\,\mathrm{tg}^2\theta\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta} = 6\int \mathrm{tg}^2\theta\,\sec\theta\,d\theta$$

$$= 6\int\left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta\,d\theta = 6\underbrace{\int \sec^3\theta\,d\theta}_{A} - 6\underbrace{\int \sec\theta\,d\theta}_{B}$$

La integral *A* se evalúa por partes, así:

Sea $u=\sec\theta \;\Rightarrow\; du=\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$ y $dv=\sec^2\theta\,d\theta \;\Rightarrow\; v=\mathrm{tg}\,\theta,$ sustituyendo:

$$A=\int \sec^3\theta\,d\theta=\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \mathrm{tg}^2\theta\sec\theta\,d\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int\left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta\,d\theta$$

$$=\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta + \int \sec\theta\,d\theta$$

Luego, $A=\int \sec^3\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \tfrac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right| + C_1$

$$B=\int \sec\theta\,d\theta = \ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right| + C_2$$

Consecuentemente,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+6}} = 3\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - 3\ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right| + C, \qquad C=C_1+C_2$$

Pero, $\sec\theta=\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}$, $\quad \mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{x}{\sqrt{6}}$, por lo tanto, sustituyendo resulta:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+6}} = 3\left(\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) - 3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}}\right| + C$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+6}}{2} - 3\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}\right| + C$$

CASO 3.

El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, donde $a > 0$.
Introduzca una variable θ considerando $x=\frac{a}{b}\sec\theta$, donde
$0 \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi$ si $x \ge a$ y $\pi \le \theta < \tfrac{3}{2}\pi$ si $x \le -a$

Ejemplo.

Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

Solución.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3^2}}.$$

Luego debemos hacer el cambio: $x = 3\sec\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3\sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta\ d\theta$; además, $\sqrt{x^2-9} = 3\,\mathrm{tg}\,\theta$.

Sustituyendo,

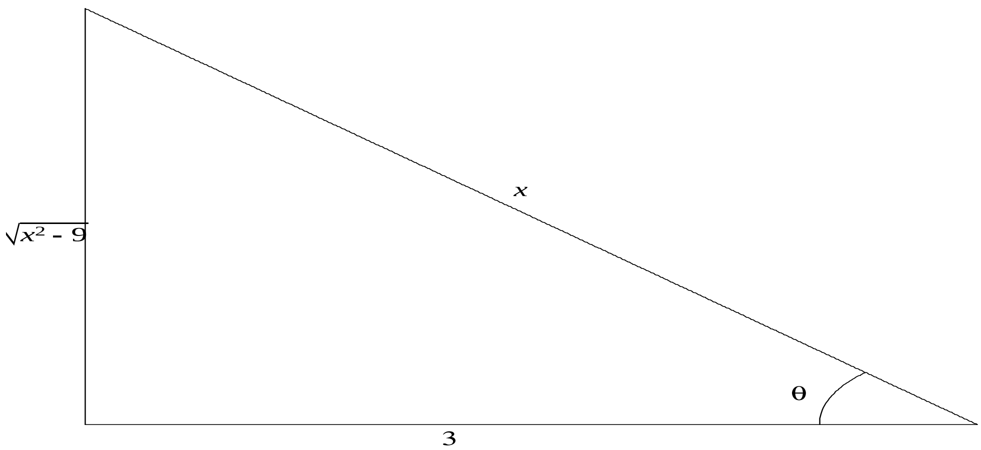
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta\ d\theta}{(3\sec\theta)^3(3\,\mathrm{tg}\,\theta)} = \tfrac{1}{27}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{27}\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{54}\int d\theta + \tfrac{1}{108}\int \cos 2\theta\, d(2\theta) = \tfrac{1}{54}\theta + \tfrac{1}{108}\mathrm{sen}\, 2\theta + C = \tfrac{1}{54}\theta + \tfrac{1}{54}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C$$

Pero, $\theta = \mathrm{arcsec}\,\frac{x}{3}$, $\cos\theta = \frac{3}{x}$ y $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$. Sustituyendo nuevamente obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \tfrac{1}{54}\mathrm{arcsec}\,\frac{x}{3} + \tfrac{1}{54}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)\left(\frac{3}{x}\right) + C = \tfrac{1}{54}\mathrm{arcsec}\,\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C$$

Ahora, resolvamos a partir de la siguiente figura.



Evidentemente, $x = 3\sec\theta \Rightarrow dx = 3\sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta\ d\theta$, y $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \quad \Rightarrow 3\,\mathrm{tg}\,x = \sqrt{x^2-9}$, luego,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3^2}} = \int \frac{3\sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta\ d\theta}{(3\sec\theta)^3(3\,\mathrm{tg}\,\theta)} = \int \frac{d\theta}{27\sec^2\theta} = \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \tfrac{1}{27}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \tfrac{1}{54}\int d\theta + \tfrac{1}{108}\int \cos 2\theta\ d(2\theta) = \tfrac{1}{54}\theta + \tfrac{1}{108}\mathrm{sen}\, 2\theta + C$$

Como $\mathrm{sen}\, 2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$, $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, $\cos\theta = \frac{3}{x}$ y $\theta = \mathrm{arcsec}\,\frac{x}{3}$, entonces

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \tfrac{1}{54}\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} + \tfrac{1}{108}\left(2\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C = \tfrac{1}{54}\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C$$

Ejercicios.

Calcule las siguientes integrales indefinidas. (En los ejercicios 2, 3, 6, 7 y 9 resuelva completando cuadrados)

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ **2)** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+x^2}}$ **3)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$ **4)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ **5)** $\int \sqrt{9x^2-16}\,dx$

6) $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx$ **7)** $\int \sqrt{x^2-2x-7}\,dx$ **8)** $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}dx$ **9)** $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Si se quiere integrar el cociente de dos funciones polinómicas y el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero debe efectuarse la división.

Ejemplo.

$$\int \frac{x^4}{x+1}dx = \int\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|+C$$

Al efectuar la división de dos polinomios, obtenemos un polinomio cociente más el resto sobre el divisor. En el ejemplo anterior, la expresión: $\frac{1}{x+1}$ pudo integrarse de inmediato. En otros casos, se la debe descomponer en fracciones simples, como se indicará a continuación.

Sabemos que: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ y grado $r(x) <$ grado $g(x)$ ó $r(x)=0$.

La integral de q es inmediata, ya que q es un polinomio, y el problema se reduce a integrar el cociente de dos funciones polinómicas cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

El procedimiento básico en éste método de integración, es la descomposición del cociente en fracciones simples, para lo cual, deben hallarse, primero, las raíces del polinomio correspondiente al denominador.

A continuación se presentan cuatro casos según las raíces sean reales o imaginarias, simples o compuestas.

CASO 1.

Las raices del denominador son reales y simples. El denominador se expresa como producto de polinomios lineales diferentes.

Ejemplo1.

$$\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$$

Las raíces del denominador son: $x_1=-2$ y $x_2=3$, luego, $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$, por lo tanto, $\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}$

Para calcular el valor de *A* y *B*, multiplicamos ambos miembros de la igualdad anterior por $(x+2)(x-3)$, así:

$$\frac{1(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=(x+2)(x-3)\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}\right)$$

$$1=\frac{A(x+2)(x-3)}{x+2}+\frac{B(x+2)(x-3)}{x-3}$$

$$1=A(x-3)+B(x+2)$$

Luego, $\begin{cases} x=-2 \Rightarrow 1=-5A \Rightarrow A=-\frac{1}{5} \\ x=3 \Rightarrow 1=5B \Rightarrow B=\frac{1}{5} \end{cases}$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x^2-x-6}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{5}}{x+2}+\frac{\frac{1}{5}}{x-3}\right)dx=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-3}=-\frac{1}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{5}\ln|x-3|+C$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln|x-3|+\ln|x+2|\right)+C=\ln\sqrt[5]{\left|\frac{x-3}{x+2}\right|}+C$$

Ejemplo 2.

$$\int\frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$$

Las raíces del denominador son: $x_1=0$, $x_2=1$ y $x_3=2$, luego,

$x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ y $\dfrac{9x^3-16x+4}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$, ahora, multiplicando ambos miembros de ésta última igualdad por el denominador obtenemos:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(9x^3-16x+4)}{x(x-1)(x-2)}=x(x-1)(x-2)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)$$

$$9x^3-16x+4=\frac{Ax(x-1)(x-2)}{x}+\frac{Bx(x-1)(x-2)}{x-1}+\frac{Cx(x-1)(x-2)}{x-2}$$

$$9x^3-16x+4=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

Luego, $\begin{cases} x=0 \Rightarrow 4=2A \Rightarrow A=2 \\ x=1 \Rightarrow -3=-B \Rightarrow B=3 \\ x=2 \Rightarrow 8=2C \Rightarrow C=4 \end{cases}$

Por lo tanto,

$$\int \frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{d(x-1)}{x-1}+4\int\frac{d(x-2)}{x-2}=2\ln|x|+3\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C$$

$$=\ln\left|x^2\right|+\ln\left|(x-1)^3\right|+\ln\left|(x-2)^4\right|+C=\ln\left|x^2(x-1)^3(x-2)^4\right|+C$$

CASO 2.

Las raíces del denominador son reales y múltiples. El denominador se expresa como producto de polinomios lineales, algunos repetidos.

Ejemplo.

$$\int\frac{x^2-x+4}{x^3-4x^2+5x-2}dx$$

Las raíces del denominador son: $x_1=1$, $x_2=1$ y $x_3=2$, luego,

$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$, y $\dfrac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$, multiplicando ambos miembros de ésta última igualdad por $(x-1)^2(x-2)$, obtenemos:

$$\frac{(x-1)^2(x-2)(x^2-x+4)}{(x-1)^2(x-2)}=(x-1)^2(x-2)\left(\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)$$

$$x^2-x+4=\frac{A(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{B(x-1)^2(x-2)}{x-1}+\frac{C(x-1)^2(x-2)}{x-2}$$

$$x^2-x+4=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$$

Luego, $\begin{cases} x=1 \;\Rightarrow\; 4=-A \;\Rightarrow\; A=-4 \\ x=2 \;\Rightarrow\; 6=C \;\Rightarrow\; C=6\end{cases}$, como no existe otro valor de x que anule alguno de los sumandos, conviene elegir cualquier valor que facilite los cálculos.

Por ejemplo, $x=0 \;\Rightarrow\; 4=-2A+2B+C$. Reemplacemos A y C por los valores obtenidos, y despejemos B: $4=-2(-4)+2B+6=14+2B \;\Rightarrow\; -10=2B \;\Rightarrow\; B=-5$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2-x+4}{x^3-4x^2+5x-2}dx=\int\left(\frac{-4}{(x-1)^2}+\frac{-5}{x-1}+\frac{6}{x-2}\right)dx=-4\int\frac{dx}{(x-1)^2}-5\int\frac{dx}{x-1}+6\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=-4\int (x-1)^{-2}\,d(x-1)-5\int\frac{d(x-1)}{x-1}+6\int\frac{d(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{-4(x-1)^{-2+1}}{-2+1}-5\ln|x-1|+6\ln|x-2|+C$$

$$=\frac{4}{x-1}+\ln\left|(x-2)^6\right|-\ln\left|(x-1)^5\right|+C$$

$$=\frac{4}{x-1}+\ln\left|\frac{(x-2)^6}{(x-1)^5}\right|+C$$

CAS0 3.

El denominador tiene raíces complejas, no reales, simples. En el factoreo del denominador aparecen polinomios cuadráticos irreducibles, todos distintos entre sí.

Ejemplo.

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$$

Las raíces del denominador son: $x_1=i \;\Rightarrow\; (x_1)^2=-1 \;\Rightarrow\; (x_1)^2+1=0$ y $x_2=\sqrt{2}\,i \;\Rightarrow\; (x_2)^2=-2 \;\Rightarrow\; (x_2)^2+2=0,$

Entonces, $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$, con lo que $\dfrac{x^2-x+4}{(x^2+1)(x^2+2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}.$

Multiplicando ambos miembros de ésta última igualdad por $(x^2+1)(x^2+2)$, obtenemos:

$$\frac{(x^2+1)(x^2+2)(x^3+x^2+x+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}=(x^2+1)(x^2+2)\left(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\right)$$

$$x^3+x^2+x+2=\frac{(x^2+1)(x^2+2)(Ax+B)}{x^2+1}+\frac{(x^2+1)(x^2+2)(Cx+D)}{x^2+2}$$

$$x^3+x^2+x+2=(x^2+2)(Ax+B)+(x^2+1)(Cx+D)$$

$$x^3+x^2+x+2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

De la última igualdad se tiene:

$A+C=1$, $B+D=1$, $2A+C=1$ y $2B+D=2$. Resolviendo el sistema, $A=0$, $B=1$, $C=1$ y $D=0$. Por lo tanto,

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+2}=\int\frac{dx}{x^2+1}+\tfrac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2}$$

$$=\operatorname{arctg}x+\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+C=\operatorname{arctg}x+\ln\sqrt{\left|x^2+2\right|}+C$$

CASO 4.

El denominador tiene raíces complejas, no reales, múltiples. En el factoreo aparecen factores cuadráticos irreducibles repetidos.

Ejemplo.

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{x^6+6x^4+12x^2+8}\,dx$$

El denominador no tiene raíces reales (no se anula para número real alguno), por lo que hacemos el cambio $x^2=r$, para calcular las raíces complejas.

En efecto, $x^6+6x^4+12x^2+8=\left(x^2\right)^3+6\left(x^2\right)^2+12\left(x^2\right)+8=r^3+6r^2+12r+8.$

Las raíces en función de $x^2=r$ son: $-2,-2$ y -2 (raíces múltiples).

Entonces, $x^6+6x^4+12x^2+8=\left(x^2+2\right)^3$ con lo que,

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3}$$

Multiplicando ambos miembros de ésta última igualdad por $\left(x^2+2\right)^3$, obtenemos:

$$\frac{\left(x^2+2\right)^3\left(x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4\right)}{\left(x^2+2\right)^3}=\left(x^2+2\right)^3\left(\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3}\right)$$

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=\frac{\left(x^2+2\right)^3(Ax+B)}{x^2+2}+\frac{\left(x^2+2\right)^3(Cx+D)}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{\left(x^2+2\right)^3(Ex+F)}{\left(x^2+2\right)^3}$$

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=\left(x^2+2\right)^2(Ax+B)+\left(x^2+2\right)(Cx+D)+(Ex+F)$$

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x+$$
$$+(4B+2C+F)$$

De ésta última igualdad se tiene que: $A=1, B=-1, C=0, D=0, E=4$ y $F=0$. Por lo tanto,

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{x^6+6x^4+12x^2+8}\,dx=\int\left(\frac{x-1}{x^2+2}+\frac{4x}{\left(x^2+2\right)^3}\right)dx$$

$$=\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-\int\frac{dx}{x^2+2}+4\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+2\right)^3}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2\right)}{x^2+2}-\int\frac{dx}{x^2+2}+2\int\left(x^2+2\right)^{-3}d\left(x^2+2\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\left(x^2+2\right)^{-2}+C$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}+C$$

Ejercicios.

Resuelva las siguientes integrales.

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$ **2)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4}$ **3)** $\displaystyle\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$ **4)** $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$

5) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+4}{x^4+8x^2+16}dx$ **6)** $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{x^4+2x^2+1}dx$ **7)** $\displaystyle\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}dx$

Ahora, veamos como resolver integrales cuando en el integrando aparecen expresiones de la forma:

1. $\sqrt[n]{ax+b}$. Se efectúa el cambio de variable $ax+b=z^n$.
2. $\sqrt{x^2+px+q}$. Se efectúa el cambio de variable $x^2+px+q=(z-x)^2$.
3. $\sqrt{-x^2+px+q}=\sqrt{(a+x)(b-x)}$. Se efectúa el cambio de variable $-x^2+px+q=(a+x)^2 z^2$, o bien $-x^2+px+q=(b-x)^2 z^2$.

Ejemplos.

1) Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$

Hagamos el cambio $x+2=z^2$, luego, $x=z^2-2$ y $dx=2z\,dz$, por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}=\int \frac{2z\,dz}{(z^2-4)z}=2\int \frac{dz}{z^2-4}=2\int \frac{dz}{(z+2)(z-2)}=2\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{z+2}+\frac{\frac{1}{4}}{z-2}\right)dz$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z+2}+\tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z-2}=-\tfrac{1}{2}\ln|z+2|+\tfrac{1}{2}\ln|z-2|+C=\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+C$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right|+C$$

2) Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$

Haciendo el cambio $x=z^4$, tendremos, $dx=4z^3\,dz$, por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}=\int \frac{4z^3\,dz}{z^2-z}=4\int \frac{z^2\,dz}{z-1}=4\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz=4\left(\tfrac{1}{2}z^2+z+\ln|z-1|\right)+C$$

$$=2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C=2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+\ln\left(\left|\sqrt[4]{x}-1\right|\right)^4+C$$

3) Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$

Haciendo el cambio $x^2+x+2=(z-x)^2$, tendremos,

$x=\dfrac{z^2-2}{2z+1}$, $dx=\dfrac{2\left(z^2+z+2\right)dz}{\left(2z+1\right)^2}$ y $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{z^2+z+2}{2z+1}$, luego,

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{\dfrac{2\left(z^2+z+2\right)dz}{\left(2z+1\right)^2}}{\left(\dfrac{z^2-2}{2z+1}\right)\left(\dfrac{z^2+z+2}{2z+1}\right)}=\frac{2dz}{z^2-2},$$ entonces,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}=\int\frac{2dz}{z^2-2}=2\int\frac{dz}{\left(z+\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)}=2\int\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{z+\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{z-\sqrt{2}}\right)dz$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{z-\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{z+\sqrt{2}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|z-\sqrt{2}\right|-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|z+\sqrt{2}\right|+C$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right|+C$$

3) Calcular $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(5-4x-x^2\right)^3}}$

Haciendo el cambio $5-4x-x^2=\left(5+x\right)\left(1-x\right)=\left(1-x\right)^2z^2$, tendremos,

$x=\dfrac{z^2-5}{z^2+1}$, $dx=\dfrac{12z\,dz}{\left(z^2+1\right)^2}$, $\sqrt{5-4x-x^2}=\left(1-x\right)z=\dfrac{6z}{z^2+1}$, luego,

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(5-4x-x^2\right)^3}}=\frac{\left(\dfrac{z^2-5}{z^2+1}\right)\left(\dfrac{12z\,dz}{\left(z^2+1\right)^2}\right)}{\dfrac{216z^3}{\left(z^2+1\right)^3}}=\frac{\left(z^2-5\right)dz}{18z^2},$$ por lo tanto,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}=\int\frac{\left(z^2-5\right)dz}{18z^2}=\tfrac{1}{18}\int\left(1-\frac{5}{z^2}\right)dz=\tfrac{1}{18}\int dz-\tfrac{5}{18}\int z^{-2}\,dz=\tfrac{1}{18}z+\tfrac{5}{18}z^{-1}+C$$

$$=\tfrac{1}{18}z+\frac{5}{18z}+C=\tfrac{1}{18}\left(\frac{z^2+5}{z}\right)+C=\tfrac{1}{18}\left(\frac{\dfrac{5-4x-x^2}{\left(1-x\right)^2}+5}{\dfrac{\sqrt{5-4x-x^2}}{1-x}}\right)+C$$

$$=\tfrac{1}{18}\left(\frac{4x^2-14x+10}{\left(1-x\right)\sqrt{5-4x-x^2}}\right)+C=\tfrac{1}{9}\left(\frac{\left(5-2x\right)\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\sqrt{5-4x-x^2}}\right)+C$$

$$=\frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}}+C$$

Ejercicios.

Resuelva:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+z}dx$ **2)** $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$ **3)** $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}dx$ **4)** $\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{4}}}$

5) $\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)}$ **6)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$ **7)** $\int \frac{dx}{3(1-x^2)-(5+4x)\sqrt{1-x^2}}$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO

Si el integrando es una función racional de $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$, se puede reducir a una función racional de z mediante la sustitución $z=\operatorname{tg}\frac{1}{2}u$. Con la finalidad de obtener la fórmula para $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ en términos de z se utilizan las identidades siguientes: $\operatorname{sen} u = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u\,\cos\frac{1}{2}u$ y $\cos u = 2\cos^2\frac{1}{2}u-1$. Entonces se tiene,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} u &= 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}u\,\cos\tfrac{1}{2}u\\ &= 2\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u\,\cos^2\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u}\\ &= 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u\,\frac{1}{\sec^2\frac{1}{2}u}\\ &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{1+\operatorname{tag}^2\frac{1}{2}u}\\ &= \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos u &= 2\cos^2\tfrac{1}{2}u-1\\ &= \frac{2}{\sec^2\frac{1}{2}u}-1\\ &= \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}-1\\ &= \frac{2}{1+z^2}-1\\ &= \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned}$$

Como $z=\operatorname{tg}\frac{1}{2}u$, entonces $dz=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}u\;du=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}u\right)du=\frac{1}{2}\left(1+z^2\right)du$, por lo tanto, $du=\frac{2dz}{1+z^2}$.

Los resultados anteriores se establecen como el siguiente teorema.

Teorema 25.

Si $z=\operatorname{tg}\frac{1}{2}u$, entonces:

$$\operatorname{sen} u=\frac{2z}{1+z^2},\quad \cos u=\frac{1-z^2}{1+z^2},\quad dx=\frac{2dx}{1+z^2}$$

Ejemplos.

1) Evalúe $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$

Haciendo el cambio $\operatorname{sen} u = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos u = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx = \dfrac{2dx}{1+z^2}$, entonces

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x - \cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\dfrac{2z}{1+z^2}-\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+z} = \int \frac{dz}{z(1+z)} = \int\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}\right)dz$$

$$= \ln|z| - \ln|1+z| + C = \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

2) Calcule $\int \sec x\,dx$

Como $\int \sec x\,dx = \int \dfrac{dx}{\cos x}$, y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1+z^2}{1-z^2}$, $dx = \dfrac{2\,dx}{1+z^2}$, entonces

$$\int \sec x\,dx = \int\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\left(\frac{2\,dz}{1+z^2}\right) = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \int\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{1-z}\right)dz = \int \frac{dz}{1+z} - \int \frac{dz}{1-z}$$

$$= \ln|1+z| - \ln|1-z| + C = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

3) Evalúe $\int \dfrac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$

Haciendo el cambio $\operatorname{sen} u = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos u = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx = \dfrac{2dx}{1+z^2}$, entonces

$$\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{4\left(\dfrac{2z}{1+z^2}\right)-3\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{2\,dz}{3z^2-8z-3} = \int \frac{2\,dz}{(3z+1)(z-3)}$$

Ejercicios.

Resuelva:

1) $\int \dfrac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$ **2)** $\int \dfrac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ **3)** $\int \dfrac{\operatorname{sen} x\,\cos x}{1-\cos x}dx$ **4)** $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ **5)** $\int \csc z\,dz$

5) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x}$ **6)** $\int \dfrac{\operatorname{cotg} x}{3+2\operatorname{sen} x}dx$ **7)** $\int \dfrac{\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t\sqrt{\operatorname{sen}^2 3t-\frac{1}{4}}}dt$ **8)** $\int \dfrac{dy}{5+4\sec y}$

Bibliografía recomendada

[1] Apostol Tom M. *Calculus*, segunda edición.
[2] Leithold Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica*, quinta edición.

Trabajo enviado por: Eleazar José García
E-mail: eleagarcia95@hotmail.com
Profesión: Licenciado en Matemática
País: Venezuela