Límite y Continuidad de Funciones.

Eleazar José García. eleagarcia95@hotmail.com

1. Límite de una función. **2.** Definición de límite de una función. **3.** Infinitésimo. **4.** Infinitésimos equivalente. **5.** Límite por la izquierda. **6.** Límite por la derecha. **7.** Funciones que crecen sin límite. **8.** Funciones que decrecen sin límite. **9.** Límites indeterminados. **10.** Continuidad de una función.

Límite de una función.

La noción de límite de una función en un número (un punto de la recta real) se presentará mediante el siguiente ejemplo: Supongamos que se nos pide dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1$$

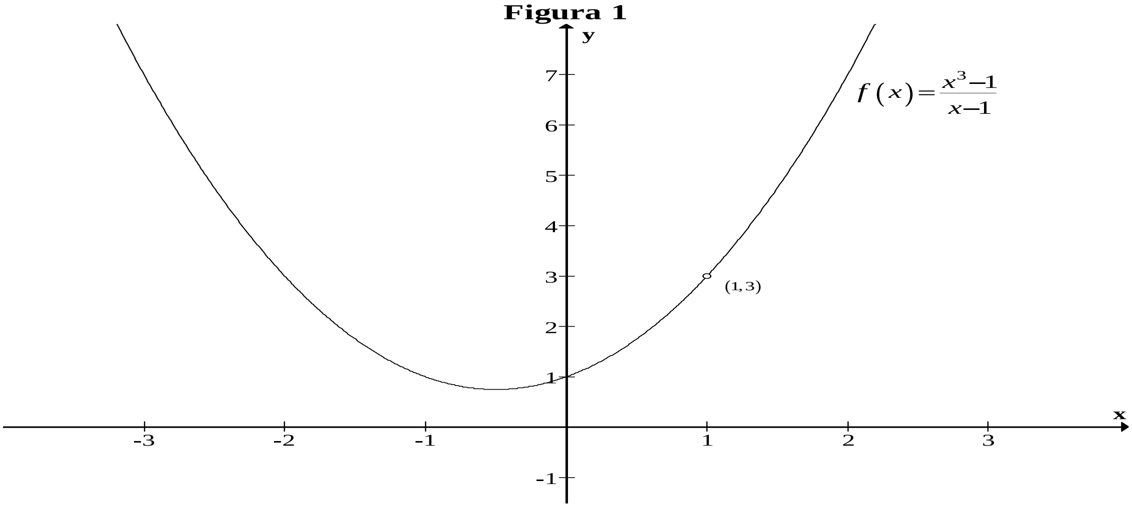
Para todo punto $x \neq 1$ podemos trazar la gráfica por los métodos conocidos por todos nosotros. Ahora, para tener idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de x=1, usamos dos conjuntos de valores x, uno que se aproxime al 1 por la izquierda y otro por la derecha. La siguiente tabla muestra los correspondientes valores de $f(x)$.

x se acerca al 1 por la izquierda $\Rightarrow\Leftarrow$ x se acerca al 1 por la derecha

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	2,71	2,9701	2,997001	¿?	3,003001	3,0301	3,31

$f(x)$ se acerca al 3 $\Rightarrow\Leftarrow$ $f(x)$ se acerca al 3

Figura 1



La figura 1 es la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1$ y como podemos observar, en dicha gráfica hay un salto en el punto (1; 3), esto se debe a que la función f no está definida en el número 1. Es de notar que ésta gráfica es la de la función $g(x)=x^2+x+1$ menos el punto (1; 3). La función g se obtiene a partir de la función f, factorizando el numerador y simplificando. La discusión anterior conduce a la siguiente descripción informal: Si $f(x)$ se aproxima arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a a por ambos lados, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y escribimos $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

Definición de límite de una función.

Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contiene a a excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a es L, lo cual se escribe como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, no importa que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x)-L| < \varepsilon$$

Esta definición indica que los valores de $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x se aproxima al número a, si el valor absoluto de la diferencia $|f(x)-L|$ puede hacerse tan pequeña como de desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

En la definición no se menciona nada acerca del valor de $f(x)$ cuando $x = a$; recordemos que la función no necesita estar definida en a para que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ exista.

Ejemplos 1.

1) Utilicemos la definición para demostrar que $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5) = 3.$

Como la función está definida en todo intervalo abierto que contiene a 2, entonces podemos utilizar la definición para hacer la demostración.

Se debe demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x-2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x-5)-3| < \varepsilon \qquad \text{(A)}$$

$$\text{si} \quad 0 < |x-2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |4x-8| < \varepsilon$$

$$\text{si} \quad 0 < |x-2| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x-2| < \varepsilon$$

$$\text{si} \quad 0 < |x-2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Entonces, si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ se cumple la proposición (A). Esto demuestra que $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5) = 3.$

Tomando $\varepsilon = 0{,}01$, $\delta = 0{,}0025$, luego, para esos valores de ε y δ, los números x que pertenecen al intervalo abierto $(1{,}9975;2)\cup(2;2{,}0025)$ verifican la proposición(A). En efecto, tomando cualquier x en el intervalo anterior, por ejemplo $x = 1{,}9976$ se tiene:

$$0 < |1{,}9976-2| = |-0{,}0024| = 0{,}0024 < 0{,}0025$$

entonces

$$|(4\cdot 1{,}9976-5)-3| = |7{,}9904-8| = |-0{,}0096| = 0{,}0096 < 0{,}01$$

Esto verifica la proposición (A) para el valor específico tomado para x.

2) Demostrar usando la definición de límite que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = 3.$

Como la función está definida en cualquier intervalo abierto que contenga al 1, excepto en el número 1, podemos aplicar la definición para realizar la demostración. En efecto,

$$\text{si } 0<|x-1|<\delta \text{ entonces } \left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon \qquad \text{(B)}$$

$$\text{si } 0<|x-1|<\delta \text{ entonces } \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}-3\right|<\varepsilon$$

$$\text{si } 0<|x-1|<\delta \text{ entonces } |x^2+x-2|<\varepsilon$$

$$\text{si } 0<|x-1|<\delta \text{ entonces } |(x-1)(x+2)|<\varepsilon$$

$$\text{si } 0<|x-1|<\delta \text{ entonces } |x+2||x-1|<\varepsilon$$

Ahora, cuando x se acerca a 1, x +2 se acerca a 3, luego, $2<|x+2|\leq 3$, entonces, $|x+2||x-1|\leq 3|x-1|<\varepsilon$, por lo tanto, $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. De la proposición (B) se obtiene que, si $0<|x-1|<\delta$ entonces $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. Si tomamos $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ se cumple la proposición (B), lo que demuestra que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$.

Ejercicios propuestos 1.

Demuestre, aplicando la definición que el límite es el número indicado.

1) $\lim\limits_{x\to -2}(7-2x)=11$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$

3) $\lim\limits_{x\to -2}(1+3x)=-5$

4) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)=8$

Con la finalidad de calcular los límites de funciones de una manera más fácil y eficaz, que aplicando la definición, son empleados los teoremas 2.1 al 2.10.

Teorema 1. ***Límite de una función lineal.***

Sea $f(x)=mx+b$ donde m y b son dos números reales cualesquiera y, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b}$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 3}(4x-7)=4\cdot 3-7=12-7=5$$

Teorema 2. ***Límite de una función constante.***

Si c es una constante (un número real cualquiera), entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a} c = c}$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to 4} 7 = 7$$

Teorema 3. ***Límite de una función identidad.***

Sea $f(x)=x$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a} x = a}$$

Ejemplo 4.

$$\lim_{x\to -2} x = -2$$

Teorema 4. ***Límite de la suma y de la diferencia de funciones.***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M}$$

Ejemplo 5.

Sean, $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$ y $\lim\limits_{x\to 3} 3x=9$, entonces, $\lim\limits_{x\to 3}\left(\left(2x-4\right)+\left(3x\right)\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-4\right)+\lim\limits_{x\to 3}3x=2+9=11$ y

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\left(2x-4\right)-\left(3x\right)\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-4\right)-\lim\limits_{x\to 3}3x=2-9=-7$

Teorema 5. ***Límite de la suma y de diferencia de n funciones.***

Si $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots,$ y $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = L_n$, entonces:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm \cdots \pm f_n(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \cdots \pm \lim_{x\to a} f_n(x) = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n}$$

Teorema 6. ***Límite del producto de dos funciones.***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M}$$

Ejemplo 6.

Sean, $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$ y $\lim\limits_{x\to 3} 3x=9$, entonces,

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\left(2x-4\right)\left(3x\right)\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-4\right)\cdot \lim\limits_{x\to 3}3x=2\cdot 9=18.$

Teorema 7. ***Límite del producto de n funciones.***

Si $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1,\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots, y\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdots\lim_{x\to a} f_n(x)=L_1\cdot L_2\cdots L_n}$$

Teorema 8. ***Límite de la n-ésima potencia de una función.***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n=L^n}$$

Ejemplo 7.

Sea, $\lim\limits_{x\to -2}(5x-10)=-20$, entonces, $\lim\limits_{x\to -2}(5x-10)^2=\left(\lim\limits_{x\to -2}(5x-10)\right)^2=(-20)^2=400.$

Teorema 9. ***Límite del cociente de dos funciones.***

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{M}\quad si\quad M\neq 0}$$

Ejemplo 8.

Sean, $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$ y $\lim\limits_{x\to 3}3x=9$, entonces, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x}{2x-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}3x}{\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)}=\dfrac{9}{2}$

Teorema 10. ***Límite de la raíz n-ésima de una función.***

Si n es un número entero positivo y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, entonces

$\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}}$ con la restricción que si n es par, $L > 0$.

Ejemplo 9.

Sea, $\lim\limits_{x\to -5}\left(4x^2+6\right)=106$, entonces

$$\lim_{x\to -5}\sqrt[4]{4x^2+6}=\sqrt[4]{\lim_{x\to -5}\left(4x^2+6\right)}=\sqrt[4]{\lim_{x\to -5}4x^2+\lim_{x\to -5}6}=\sqrt[4]{4(-5)^2+6}=\sqrt[4]{100+6}=\sqrt[4]{106}.$$

Teorema 12. ***Límite del logaritmo de una función.***

Sean: *b* un número real positivo y distinto de 1, y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0,$ entonces

$$\lim_{x \to a}\left[\log_b f(x)\right] = \log_b\left[\lim_{x \to a} f(x)\right].$$

Ejemplo 10.

Calcule: $\lim\limits_{x \to e}\left[\ln(2x - e)\right]$ aplicando el teorema 2.12.

Apliquemos el teorema exigido:

$$\lim_{x \to e}\left[\ln(2x - e)\right] = \ln\left[\lim_{x \to e}(2x - e)\right] = \ln\left[\lim_{x \to e} 2x - \lim_{x \to e} e\right] = \ln(2e - e) = \ln(e) = 1$$

Sin aplicar el teorema:

$$\lim_{x \to e}\left[\ln(2x - e)\right] = \ln(2e - e) = \ln(e) = 1.$$

Teorema 11. ***Unicidad del límite de una función.***

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces, $L_1 = L_2$.

Este teorema asegura que si el límite de una función existe éste es único.

Infinitésimo.

La función *f* es un infinitésimo en el punto *a* si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Ejemplos 10.

1) La función *f* (*x*) = *x* es un infinitésimo en 0 pues $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
2) La función *g* (*x*) = *x* – 1 es un infinitésimo en 1 porque $\lim\limits_{x \to 1}(x - 1) = 0$.
3) La función *h* (*x*) = sen *x* es un infinitésimo en 0 ya que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.
4) La función *m*(*x*) = 4-2*x* es un infinitésimo en 2 pues $\lim\limits_{x \to 2}(4 - 2x) = 0$.
5) La función *r*(*x*) = cos *x* es un infinitésimo en $\pi/2$ porque $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x = 0$.

Infinitésimos equivalentes.

Dos infinitésimos en un mismo punto son equivalentes, cuando el límite de su cociente es la unidad.

$$\boxed{f(x) \sim g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Cuando en un límite, un infinitésimo esté multiplicado o dividido se le puede sustituir por otro infinitésimo equivalente. La suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al infinitésimo de menor orden.

Infinitésimos más frecuentes en 0.

$\operatorname{sen} x \sim x$	$\operatorname{arcsen} x \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$
$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$(1+x)^n - 1 \sim nx$	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

Ejemplos 11.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x}{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{10^x - 1}{e^x - 1} \right) = \frac{\lim\limits_{x\to 0} (10^x - 1)}{\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x \ln 10}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x \ln 10}{x} \right) = \lim\limits_{x\to 0} (\ln 10) = \ln 10$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 + \operatorname{sen} x}{3x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} (x^3 + \operatorname{sen} x)}{\lim\limits_{x\to 0} 3x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x}{\lim\limits_{x\to 0} 3x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x}{\lim\limits_{x\to 0} 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Ejercicios propuestos 2.

Calcule los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2 (1+\cos x)}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\sqrt[m]{1+x} - 1}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg}^3 x}$. 8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{\operatorname{tg}^3 x}$. 9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4\ln(x+1) - \operatorname{arcsen}^4 x + \operatorname{tg}^2 2x}{5x + 3x^2 - x^3}$. 10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7(e^x - 1)}{3\ln(1+x)}$. 11) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln^2 x}{x-1}$. 12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3 \ln(1+x)}{3(\operatorname{arcsen}^6 x)\operatorname{tg} x}$. 13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Límite por la izquierda.

Sea f definida en cada número del intervalo abierto $(c;a)$. El límite de $f(x)$, cuando x se acerca al número a por la izquierda es L, lo cual se escribe $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L,$ si para cualquier $\varepsilon>0,$ sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta>0$ tal que

$$\text{si}\quad 0< a-x<\delta \quad \text{entonces}\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Límite por la derecha.

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto $(a;c)$. El límite de $f(x)$, cuando x se acerca al número a por la izquierda es L, lo cual se escribe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L,$ si para cualquier $\varepsilon>0,$ sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta>0$ tal que

$$\text{si}\quad 0< x-a<\delta \quad \text{entonces}\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Teorema 12.

El $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L, si y sólo si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L}$$

Funciones que crecen sin límite.

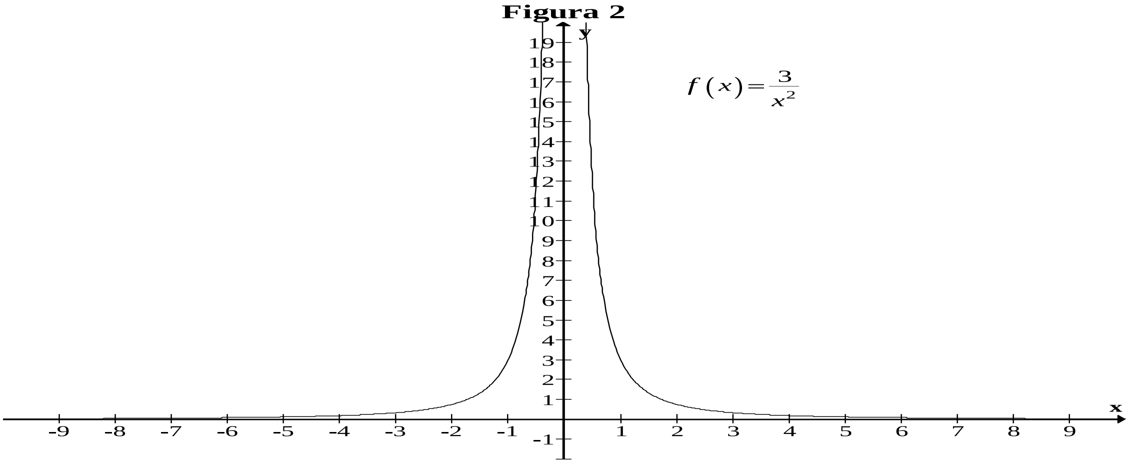
Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a mismo. La función $f(x)$ crece sin límite, cuando x se aproxima al número a, lo cual se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ si para cualquier $N>0$ existe una $\delta>0$ tal que:

$$\text{si}\quad 0<|x-a|<\delta \quad \text{entonces}\quad f(x)>N$$

Ejemplo 13.

Supongamos que f es la función definida por $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$. La gráfica de esta función se muestra en la figura siguiente.

Figura 2



El comportamiento de la función *f* es que crece sin límite cuando *x* se acerca al número cero por la izquierda o por la derecha. Cuando esto sucede decimos que el límite de *f*(*x*) es menos infinito cuando *x* tiende al número 0, lo que se indica mediante la siguiente notación: $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$

Funciones que decrecen sin límite.

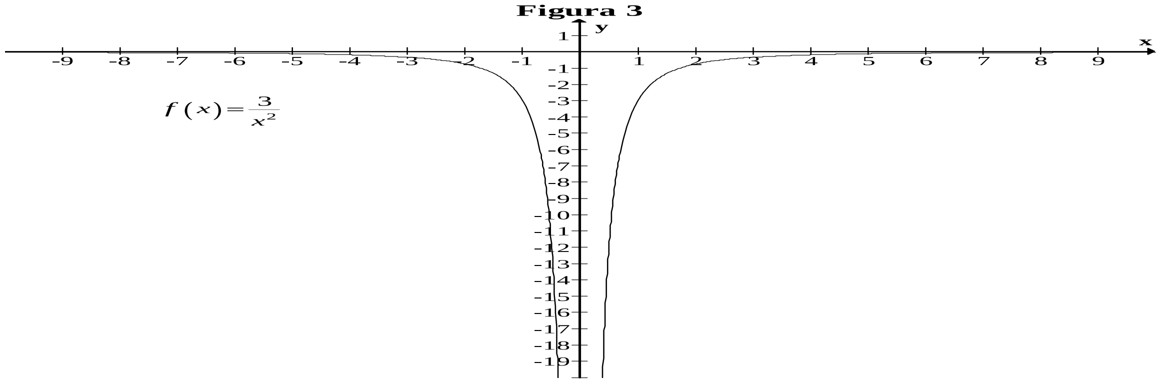
Sea *f* una función definida en algún intervalo abierto que contiene al número *a*, excepto posiblemente en *a* mismo. La función *f* (*x*) decrece sin límite, cuando *x* se aproxima al número *a*, lo cual se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si para cualquier $N < 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

Ejemplo 14.

Supongamos que *f* es la función definida por la ecuación $f(x) = \frac{-3}{x^2}$. La gráfica de *f* se muestra en la figura siguiente.

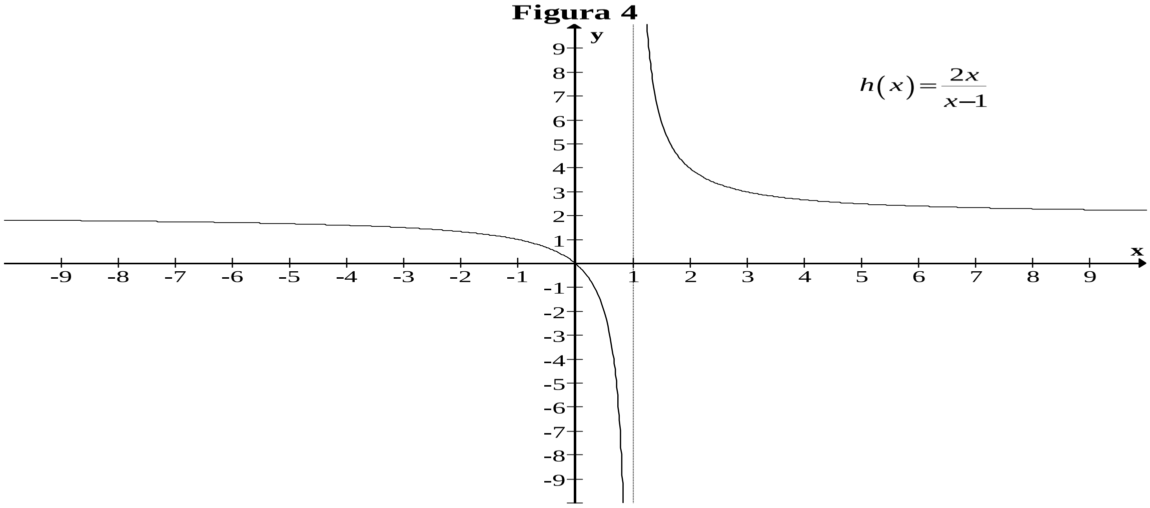
Figura 3



A partir de la gráfica se observa que el comportamiento de la función *f* es que decrece sin límite cuando *x* se acerca a "0" por la izquierda o por la derecha. Este comportamiento lo expresamos diciendo que el límite de $f(x)$ es menos infinito cuando *x* tiende a cero, lo que se escribe de la siguiente manera: $\lim_{x \to 0} \frac{-3}{x^2} = -\infty$.

Ahora consideremos la función *h* definida por la ecuación $h(x) = \frac{2x}{x-1}$. La gráfica de *h* se presenta en la figura 4.

Figura 4



El comportamiento de *h* cuando *x* se acerca al número 1 por la izquierda es diferente a su comportamiento cuando *x* se acerca al 1 por la derecha. Cuando se acerca al 1 por la izquierda *h*(*x*) decrece sin límite, mientras que cuando *x* se acerca al 1 por la derecha *h*(*x*) crece sin límite.

Estos comportamientos de *h* lo escribimos de las siguientes maneras: $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}=-\infty$ y $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}=+\infty$.

Ejemplos 15.

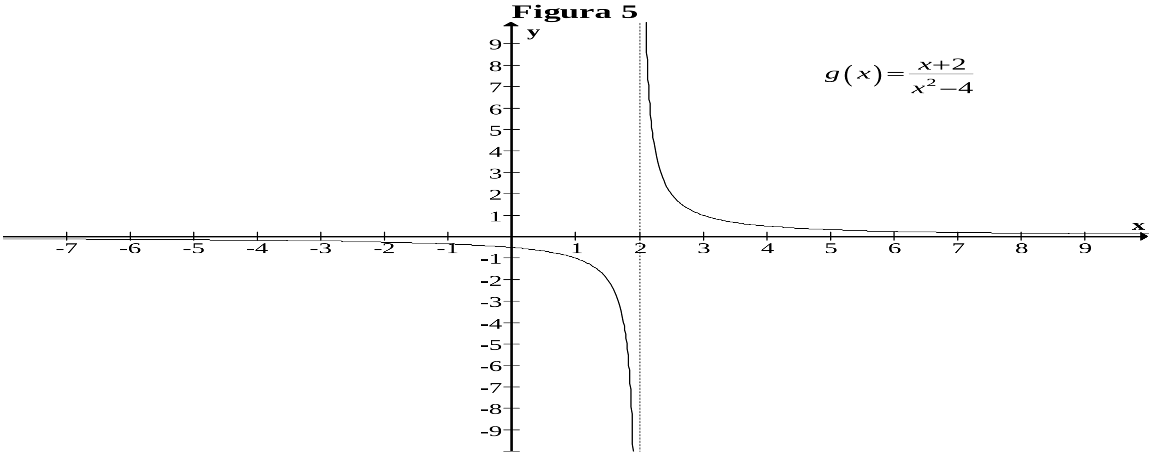
Determine el límite analíticamente y apoye la respuesta trazando la gráfica de la función.

1) $\lim_{t\to 2^+}\frac{x+2}{x^2-4}$.

Solución: $\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$.

La gráfica de la función $g(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$ es mostrada a continuación.

Figura 5



En la gráfica se observa que cuando *x* se acerca al número 2 por la derecha *g*(*x*) crece sin límite.

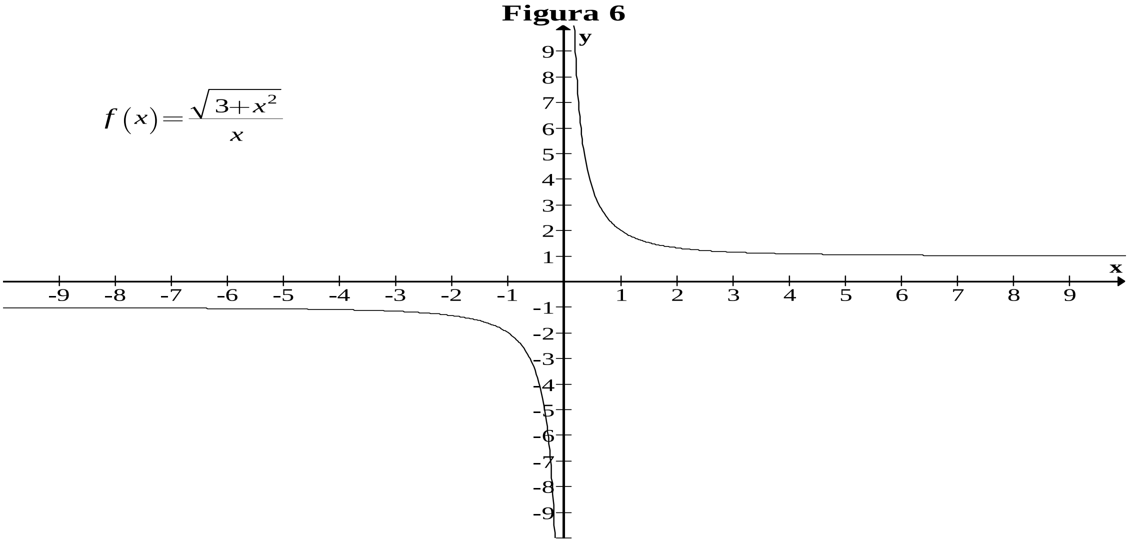
2) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$.

Solución

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{3+x^2}}{\lim\limits_{x\to 0^-} x} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3+x^2\right)}}{\lim\limits_{x\to 0^-} x} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-} 3 + \lim\limits_{x\to 0^-} x^2}}{\lim\limits_{x\to 0^-} x} = \frac{\sqrt{3+\lim\limits_{x\to 0^-} x^2}}{\lim\limits_{x\to 0^-} x} = \frac{\sqrt{3+0}}{0^-} = -\infty$$

La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$ es mostrada en la figura 6.

Figura 6



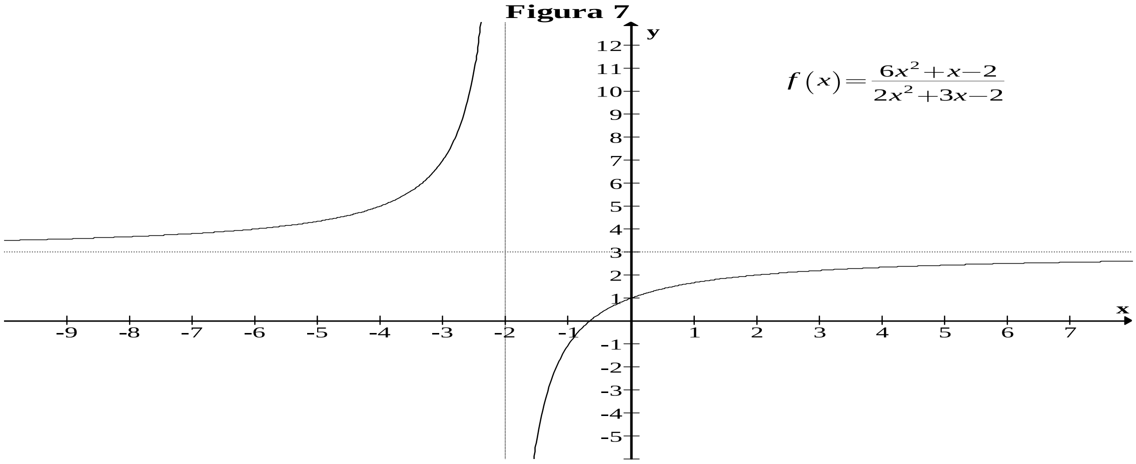
Observemos que $f(x)$ decrece sin límite cuando x se acerca al 0 por la izquierda.

3) $\lim\limits_{t\to -2^+} \dfrac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$.

Solución: $$\lim_{x\to -2^+} \frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+2\right)} = \lim_{x\to -2^+}\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{x+2}\right) = \frac{\lim\limits_{t\to -2^+}\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\lim\limits_{x\to -2^+}\left(x+2\right)} = \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{0^+} = -\infty$$

La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$ se muestra en la figura 7:

Figura 7



Observando la gráfica podemos verificar que cuando *x* se acerca al número -2 por la derecha, *f* (*x*) decrece sin límite.

Límites indeterminados.

Los límites indeterminados que estudiaremos en éste capítulo son:

La forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Si *f* y *g* son dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$, entonces la función f/g tiene la forma indeterminada $0/0$ en *a*.

La manera de resolver los límites indeterminados $\frac{0}{0}$, será explicada mediante dos:

Ejemplos 16.

1) Calcular $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$.

Se tiene que $\lim_{x\to 4}\left(x^2-x-12\right)=0$ y $\lim_{x\to 4}\left(x^2-3x-4\right)=0$, entonces, $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{0}{0}$.

Para eliminar la indeterminación, factorizamos el numerador y el denominador, simplificamos y resolvemos el límite obtenido, así:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x+1}=\frac{7}{5}.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{7}{5}$.

2) Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x}$.

Aquí tenemos:

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{4x^2+13}-7\right)=0 \text{ y } \lim_{x\to 3}(6-2x)=0, \text{ luego, } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x}=\frac{0}{0}.$$

En éste caso procedemos de la siguiente manera: multiplicamos el numerador y el denominador por la conjugada de $\sqrt{4x^2+13}-7$, dicha conjugada es: $\sqrt{4x^2+13}+7$, luego se resuelve el límite resultante, así:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{4x^2+13}-7\right)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}{(6-2x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(4x^2+13\right)-49}{2(3-x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^2-36}{2(3-x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4\left(x^2-9\right)}{2(3-x)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}=$$

$$-\lim_{x\to 3}\frac{4(x+3)(x-3)}{2(x-3)\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}=-\lim_{x\to 3}\frac{4(x+3)}{2\left(\sqrt{4x^2+13}+7\right)}=-\frac{24}{28}=-\frac{6}{7}.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x^2+13}-7}{6-2x}=-\frac{6}{7}$

La forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Si f y g son dos funciones tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, entonces la función f/g es indeterminada con la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

La forma de resolver éstos límites será explicada mediante dos ejemplos.

Ejemplos 17

1) Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}$.

Es evidente que $\lim_{x\to+\infty}(4x-3)=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}(2x-5)=+\infty$, por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\frac{+\infty}{+\infty}$.

Para resolver éste límite dividimos el numerador y el denominador entre la x de mayor exponente, así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{2-\frac{5}{x}}=\frac{4-0}{2-0}=2.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=2$.

2) Calcular $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2}$.

En este caso $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^4-2x+4\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^5+x^2-2\right)=-\infty$, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$. Para resolver, dividamos el numerador y el denominador entre x^5 pues éste es la potencia de x de mayor exponente, así:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{4}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}-\frac{2}{x^5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^5}}{3+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{0-0-0}{3-0+0}=\frac{0}{3}=0.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x+4}{3x^5+x^2-2}=0.$

La forma indeterminada $\infty-\infty$.

Si f y g son dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, entonces la función $f-g$ es indeterminada de la forma $\infty-\infty$. La manera de resolver éstos límites será explicado con ejemplos.

Ejemplos 18

1) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\infty-\infty$. Para resolver éste límite racionalizamos, así:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+x\right)}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\frac{-\infty}{+\infty},$$

Hemos transformado el límite en otro indeterminado de la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, que se resuelve dividiendo el numerador y el denominador entre x, así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

2) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3-1}-\sqrt[3]{x^2}\right)$.

Como:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2x^3-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}=+\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3-1}-\sqrt[3]{x^2}\right)=\infty-\infty$.

Para resolver éste límite racionalizamos, así:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3-1}-\sqrt[3]{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{2x^3-1}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{\left(2x^3-1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2x^3-1\right)x^2}+\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}\right)}{\sqrt[3]{\left(2x^3-1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2x^3-1\right)x^2}+\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^3-1\right)-x^2}{\sqrt[3]{4x^6-4x^3+1}+\sqrt[3]{2x^5-x^2}+\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2-1}{\sqrt[3]{4x^6-4x^3+1}+\sqrt[3]{2x^5-x^2}+\sqrt[3]{x^4}}=\frac{+\infty}{+\infty}.$$

El límite se transformó en otro indeterminado de la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$, que se resuelve dividiendo el numerador y el denominador entre la potencia de *x* de mayor exponente, que en el caso que nos ocupa es x^3, así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\sqrt[3]{\frac{4x^6}{x^9}-\frac{4x^3}{x^9}+\frac{1}{x^9}}+\sqrt[3]{\frac{2x^5}{x^9}-\frac{x^2}{x^9}}+\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^9}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{4}{x^3}-\frac{4}{x^6}+\frac{1}{x^9}}+\sqrt[3]{\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^7}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}}=+\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3-1}-\sqrt[3]{x^2}\right)=+\infty.$

Teorema 23. ***Teorema de estricción o del encaje***.

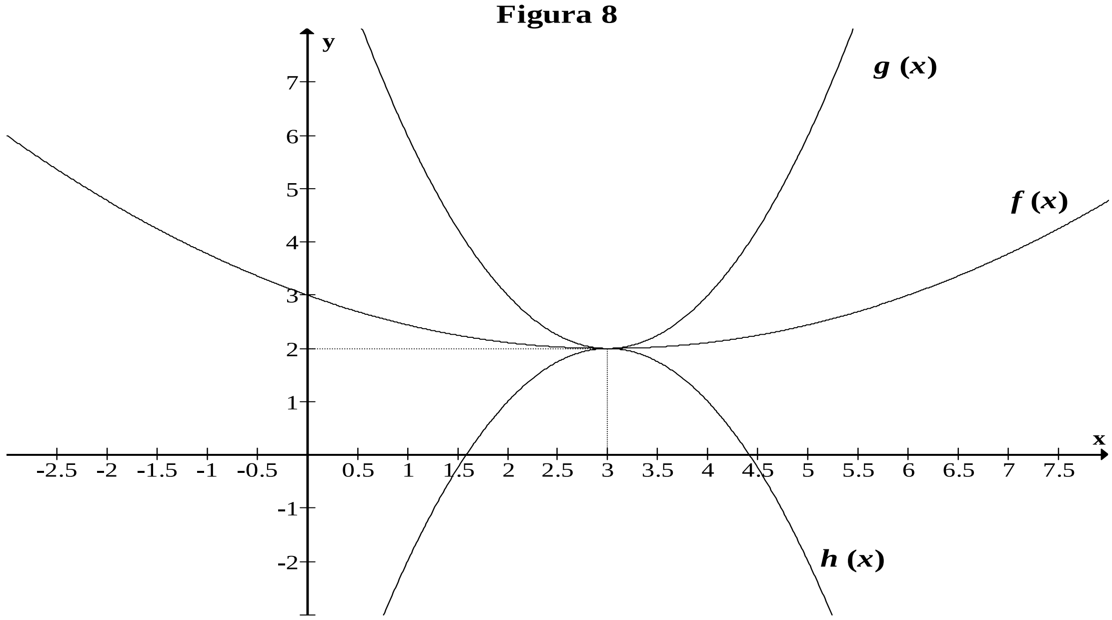
Si $h(x)\le f(x)\le g(x)$ para todo *x* en un intervalo abierto que contiene a *a*, excepto en el propio *a* y si $\lim_{x\to a}h(x)=L=\lim_{x\to a}g(x)$, entonces $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

Ejemplo 2.19.

Sean *f*, *g* y *h* las funciones definidas por $h(x)=-x^2+6x-7$, $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+3$ y $g(x)=x^2-6x+11$.

Las gráficas de estas funciones están trazadas en la figura 8.

Figura 8



Las gráficas de h, f y g son parábolas que tienen sus vértices en el punto (3; 2). Las tres funciones están definidas en $x = 3$. También se observa que $h(x) \le f(x) \le g(x)$. Además, $\lim\limits_{x\to 3}\left(-x^2+6x-7\right)=2$ y $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-6x+11\right)=2$. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de estricción $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$.

Ejercicios propuestos 3

Calcule los siguientes límites.

1) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{1-9x^2}{1-3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x-14}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1/2}\sqrt[3]{\dfrac{4x^2+4x-3}{4x^2-1}}$ 4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{9-t}-3}{t}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{3x^3+6}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x-2}$, recuerde que: $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt{4x}-2}$, recuerde que: $\begin{cases}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b\\ y\\ \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b\end{cases}$

8) $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{\dfrac{5x+4}{x-5}}$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^4-7x^2+10}{20x^4+3}$ 10) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^7-3x^6+2x^3}{7x^7+x^5-4}$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4+1}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-2x^2\right)$ 13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[4]{3x}-\sqrt[4]{x}\right)$

Dadas las funciones indicadas, calcule el límite señalado si existe, sino existe establezca la razón.

14) $f(x)=\begin{cases} x-4 & si \quad x<-4\\ \sqrt{16-x^2} & si \quad -4\le x\le 4\\ 4-x & si \quad 4<x\end{cases}$

$(a)\ \lim\limits_{x\to -4} f(x)$; $(b)\ \lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

15) $g(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x\le 2\\ 2-x & si \quad 2<x\le 4\\ x-2 & si \quad 4<x\end{cases}$

$(a)\ \lim\limits_{x\to 2} g(x)$; $(b)\ \lim\limits_{x\to 4} g(x)$.

Utilice el teorema de estricción para determinar el límite.

16) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, si $\left|f(x)+4\right|<2(3-x)^4$ para toda x

17) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}\pi} f(x)$, dado que $-\sin x\le f(x)\le 2+\sin x$, para toda x en el intervalo $(-\pi;0)$.

18) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, dado que $1-\cos^2 x\le f(x)\le x^2$, para toda x en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right)$.

Continuidad de una función.

Función continua en un número.

Una función f es continua en un número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguiente:

i) $f(a)$ existe;

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

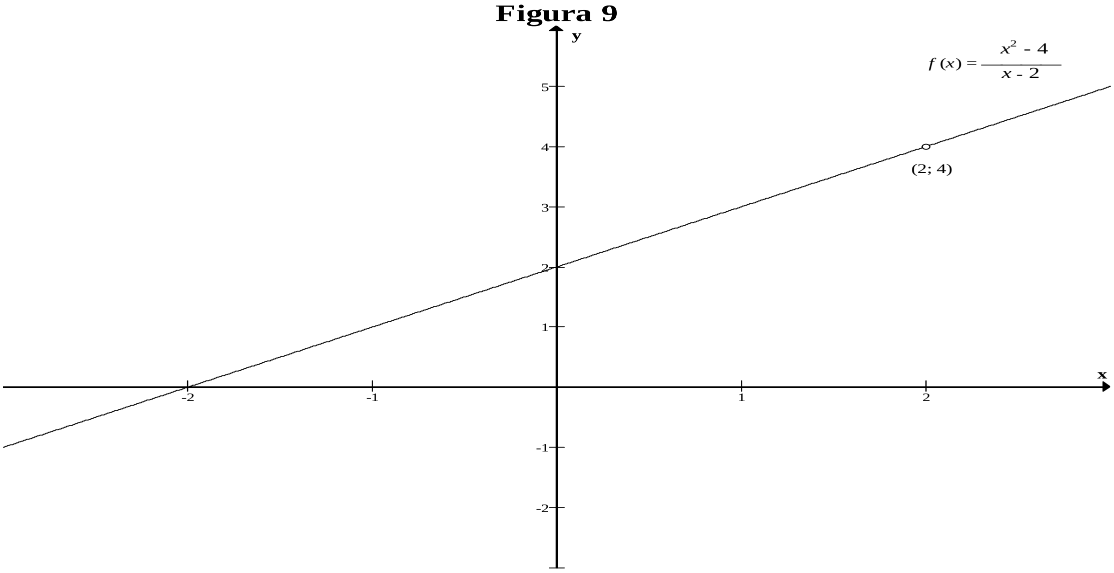
iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si por lo menos una de estas tres condiciones no se cumple en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en a.

Ejemplos 20.

1) La función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, es discontinua en 2, pues dicha función no está definida en el 2. Veamos como es su comportamiento gráficamente, mostrado en la figura 9.

Figura 9



La gráfica muestra un salto en el punto (2; 4), esto se debe a la discontinuidad de la función en x= 2, por lo tanto, f(2) no existe. Observando la gráfica se sospecha que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe y es igual a 4.

Veamos si esto es cierto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4.$$

Cuando una función f presenta las características anteriores, es decir, no está definida en un número a pero $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, se dice que f presenta una **discontinuidad removible** o **eliminable**, porque si f es redefinida en a de manera que $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$, la nueva función es continua en a. Si una discontinuidad no es removible se dice que es una **discontinuidad esencial**.

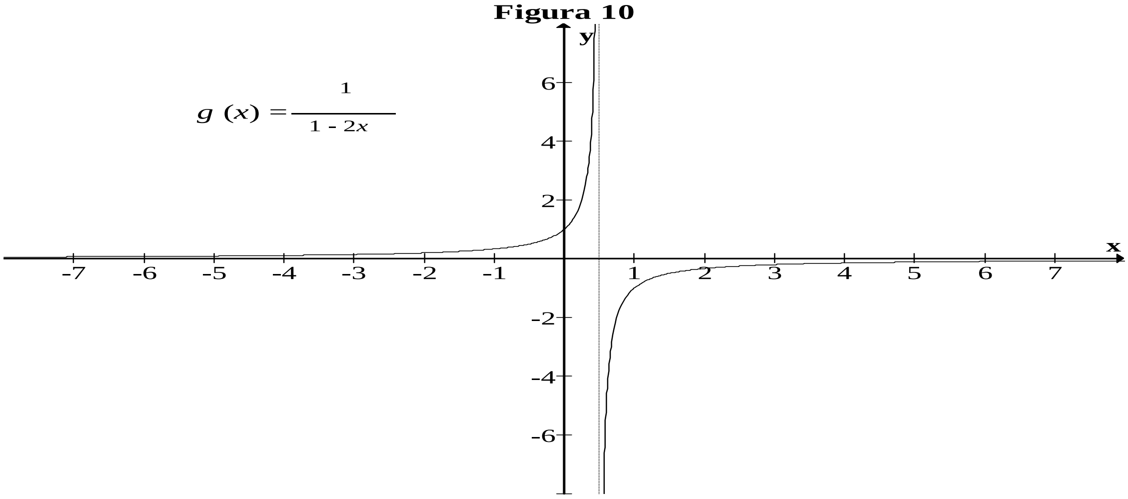
La discontinuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, es removible, porque si se redefine en 2, se obtiene la siguiente función:

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2\\ 4 & si \quad x=2\end{cases}}$$

La función F es continua en 2, puesto que, $\lim_{x\to 2} F(x)=4$ y $F(2)=4$.

2) Sea g la función definida por $g(x)=\dfrac{1}{1-2x}$. La gráfica de la función es mostrada en la figura 10.

Figura 10



La gráfica de g se rompe en el punto donde $x=\frac{1}{2}$, pues la función no está definida en dicho punto. Además, $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} g(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} g(x)=-\infty$, luego, $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(x)$ no existe. Por lo tanto,

i) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ no está definida.

ii) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(x)$ no existe.

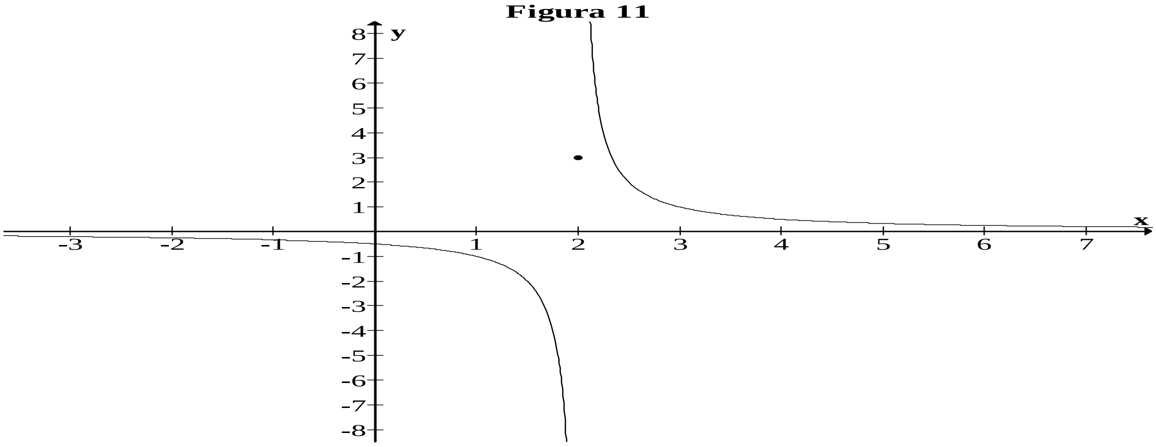
Entonces, la función g es discontinua en $\frac{1}{2}$, y la discontinuidad es esencial porque $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(x)$ no existe. La discontinuidad de éste ejemplo recibe el nombre de **discontinuidad infinita**.

3) Sea h la función definida por

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & si \quad x\neq 2\\ 3 & si \quad x=2\end{cases}$$

La gráfica de h es mostrada en la siguiente figura:

Figura 11



Veamos que sucede con las condiciones de continuidad de la función h en $x = 2$.

i) $g(2) = 3$

ii) $\lim_{x \to 2^-} h(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} h(x) = +\infty$, por lo tanto, $\lim_{x \to 2} h(x)$ no existe.

Como la condición ii) no se cumple, h es discontinua en 2. La discontinuidad es infinita, y desde luego esencial.

Bibliografía

[1] Rabuffetti Hebe T. *Introducción al Análisis Matemático*, décima edición.

[2] Apostol Tom M. *Calculus*, segunda edición.

Autor:
Eleazar José García
eleagarcia95@hotmail.com
Profesión: Licenciado en Matemática
País: Venezuela